

A photograph of several students sitting at desks in a classroom, looking towards the front. A large window in the background shows a view of a building and a green field.

Complexe stromen

een 6 vwo module voor nlt
en wiskunde D



Universiteit Utrecht

Junior College
Utrecht



Complexe Stromen

*een 6 vwo module voor
nlt en wiskunde D*

versie 1.0

**Junior College
Utrecht**



Universiteit Utrecht



Colofon

De module *Complexe Stromen* is bestemd voor 6 vwo. De module is op 22 april 2010 gecertificeerd door de Stuurgroep NLT voor gebruik in domein B (Fundament van Wetenschap en Technologie) en kan ook gebruikt worden bij wiskunde D, domein E (Complexe Getallen).

Het certificeringsnummer is X207-053-VB.

De originele gecertificeerde module is in pdf-formaat te downloaden via <http://www.betavak-nlt.nl>

De module is gemaakt in opdracht van het Junior College Utrecht (www.jcu.uu.nl).

De module is ontwikkeld door een ontwikkelteam onder leiding van drs. A.J. Godijn.

Met bijdragen van:

- Universiteit Utrecht, Faculteit Bètawetenschappen
 - Drs. A.J. Goddijn (Freudenthal Instituut, dept. Wiskunde)
 - Drs. J. van Hoof (Julius Instituut, dept. Natuur- en Sterrenkunde)
- Junior College Utrecht
 - dr. A.E. van der Valk (curriculumcoördinator)



Voor deze module geldt een Creative Commons Naamsvermelding-Niet-commercieel-Gelijk delen 3.0 Nederland Licentie.

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/nl>

Het auteursrecht op de module berust bij de Universiteit Utrecht en het Junior College Utrecht.

Aangepaste versies van deze module mogen alleen verspreid worden indien aangegeven wordt dat het een aangepaste versie betreft, onder vermelding van de auteur van de wijzigingen.

De auteurs hebben bij de ontwikkeling van dit materiaal gebruik gemaakt van materiaal van derden. Waar dat is gebeurd, is zo veel mogelijk de bron vermeld en gaat het, tenzij anders vermeld (©), om een soortgelijke of ruimere licentie. Mocht er onverhoopt toch materiaal zijn opgenomen waarvan de bronvermelding of licentie niet correct zijn weergegeven, dan verzoeken we u contact op te nemen met het Bètasteunpunt Utrecht: <http://www.betasteunpunt-utrecht.nl>.

De module is met zorg samengesteld. De Universiteit Utrecht aanvaardt geen enkele aansprakelijkheid voor enige schade voortkomend uit (het gebruik van) deze module.

Versie 1.0, 2010

Inhoudsopgave

Inleiding op de module	3
Hoofdstuk 1. Componenten in complexe schakelingen	5
Hoofdstuk 2. Sinussignalen onder de loep	21
Hoofdstuk 3. Een condensator in een wisselstroomnetwerk	39
Hoofdstuk 4. Constructie van de complexe getallen	51
Hoofdstuk 5. Complexe stroomen en spanningen gebruiken	83
Hoofdstuk 6. Complexe getallen gaan hun eigen gang	99
Appendix A. Signalen in een LCR-schakeling met wisselspanninginvoer	125
Appendix B. Optellen van signalen met ongelijke hoekfrequenties	129
Grafiekenpapier	131

Inleiding op de module

Waarover het gaat, natuurkundig: elektrische schakelingen

In deze module maak je kennis met de eigenschappen van elektrische schakelingen waarin wisselstromen lopen. Zulke schakelingen heb je bijna altijd in de buurt: lamp, radio, versterker, video, computer. In communicatieapparatuur spelen snelle wisselspanningen een grote rol; denk aan je GSM, de GPS, en aan andere toepassingen van elektronica. Van die snelle wisselspanningen merk je meestal niets. Belangrijke componenten van de schakelingen die daarvoor nodig zijn, zijn weerstand, spoel en condensator.

Bij wisselstroom gaat de stroom (de elektronen) heen en weer. De wisselstroom en wisselspanning van het elektriciteitsnet kun je wiskundig beschrijven met een sinusfunctie; op de oscilloscoop kun je een signaal zichtbaar maken en de sinusvorm zien. Sinusvormige signalen hebben bijzondere eigenschappen, die hen geschikt maken voor toepassingen in de elektriciteitsvoorziening en communicatieapparatuur.

Waarover het gaat, wiskundig: complexe getallen

Het rekenen aan wisselstroomschakelingen (en het voorspellen van het effect van de schakeling) is behoorlijk lastig, omdat je met verschillende sinusvormige signalen tegelijk rekening moet houden, die niet op hetzelfde moment hun toppen en nulpunten hebben. Maar er is een bijzonder stuk wiskunde dat hier goed kan helpen.

Voor dat stuk wiskunde is het nodig nieuwe getallen te maken. Je kent al getallen met een positieve en met een negatieve richting, maar nu bouwen we zelf getallen met nog andere richtingen. Die getallen heten de *complexe getallen*. Eén van die complexe getallen is het getal i , waarvan je zult merken dat de richting ervan precies die tussen positief en negatief in is en waarvan het kwadraat gelijk is aan -1 .

Mysterieus? Zeker, en vooral in het begin.

Complex, dus moeilijk? Nee, dat niet per se. Het woord 'complex' slaat meer op het feit dat deze getallen samengesteld zijn uit verschillende componenten, zoals bijvoorbeeld richting en grootte. Het is wel iets heel bijzonders, zelf nieuwe getallen bouwen!

Hoe we te werk gaan in dit boek

De inzichten in schakelingen en complexe getallen bouwen we in deze module tegelijk op. De complexe getallen lijken daardoor niet alleen abstract, maar krijgen meteen een toepassing. Van de ander kant: de wiskunde en de natuurkunde in dit boek hebben ook ieder een eigen gezicht.

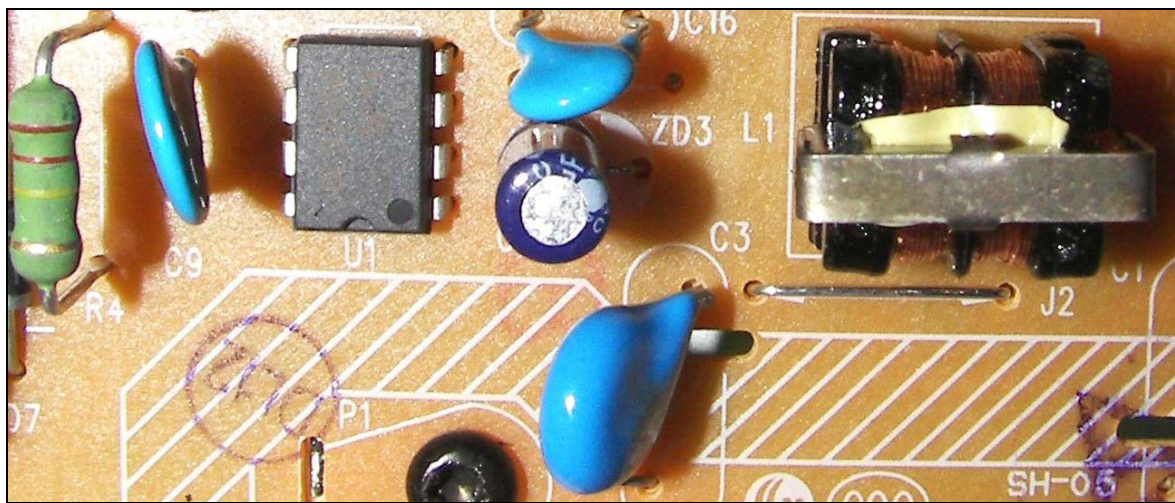
Bij de natuurkunde maak je kennis met het gebruik van speciale schakelingen, bij de wiskunde merk je dat de complexe getallen binnen de wiskunde zelf van belang zijn, bijvoorbeeld bij meetkunde.

Hoofdvraag van de module

Kortom, deze module gaat over de vraag: hoe kun je wisselspanning en andere 'signalen' beïnvloeden met schakelingen van weerstanden, spoelen en condensatoren en welke wiskunde kun je gebruiken om te beschrijven wat er daarbij gebeurt?

Aan de slag!

Hoofdstuk 1. Componenten in complexe schakelingen



Onderwerpen in dit hoofdstuk

- Condensator en spoel
- Twee spanningen optellen
- Netwerken
- De spanningsdeler
- Netwerken met weerstanden

Inleiding op dit hoofdstuk

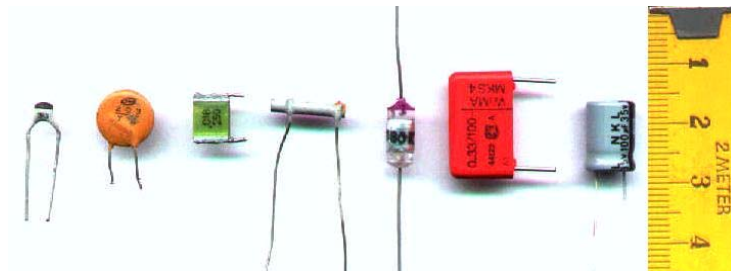
De meeste elektrische schakelingen die je in de natuurkundelessen bent tegengekomen, waren gelijkspanningschakelingen. Die bestaan meestal uit een combinatie van de volgende schakelementen: een elektrische gelijkspanningsbron (bijvoorbeeld een batterij), weerstanden, (weerstandsloze) draden, een schakelaar, lampjes en wat we voorlopig genoemd hebben 'elektrische apparaten'. Heel veel elektrische apparaten werken echter met wisselspanning en niet met gelijkspanning.

In dit hoofdstuk leer je twee nieuwe schakelementen kennen: de condensator en de spoel. En je krijgt antwoord op de vraag: welke eigenschappen hebben deze schakelementen als je ze opneemt in een gelijkstroomschakeling. Nog interessanter: hoe gedragen ze zich in een wisselstroomschakeling?

1.1 De condensator

Een condensator¹ is een schakelement dat je kunt gebruiken om elektrische lading op te slaan. Dat doe je door er een gelijkspanning over te zetten. Door lading op te slaan, sla je ook elektrostatische energie op.

Je kunt je een condensator voorstellen als twee evenwijdige metalen platen met een isolerende laag ertussen (het diëlektricum). Moderne condensatoren hebben allerlei vormen. In de praktijk kun je aan het uiterlijk van een condensator niet zien hoe hij van binnen in elkaar zit. In onderstaande figuur zie je een aantal condensatoren.



Bron: Wikipedia

figuur 1-1

Schematisch wordt een condensator als volgt weergegeven:



figuur 1-2

Dit symbool geeft een goed idee van de manier waarop een condensator gemaakt wordt. Hij bestaat uit twee even grote metalen platen met daartussen een niet geleidende tussenstof. Aan iedere plaat wordt een aansluitdraad bevestigd.

Als je over een condensator een spanningsverschil U aanbrengt zal op de plaat die verbonden is met de $+$ -pool van de spanningsbron een positieve lading $+Q$ ontstaan en op de andere plaat een even grote negatieve lading $-Q$. Als je de spanningsbron verwijdt, blijft de lading op de platen bestaan; vandaar dat wel gezegd wordt dat de condensator een opslagplaats voor elektrische lading is. Op deze manier kun je dus ook (elektrische) energie in een condensator opslaan.

De grootte van de opgeslagen lading Q blijkt evenredig te zijn met de aangelegde spanning U :

$$Q = \alpha U$$

De grootte van de evenredigheidsconstante α is afhankelijk van de precieze bouw van een condensator. Men heeft deze constante de naam *capaciteit* gegeven; het symbool daarvoor is C . Hiermee wordt bovenstaande formule:

$$Q = C U$$

formule 1-1

De capaciteit C van een condensator is zijn belangrijkste natuurkundige eigenschap. De eenheid van C is *farad* (F). Condensatoren kun je kopen met een capaciteit in de orde van grootte van pF (10^{-12} F) tot mF (10^{-3} F).

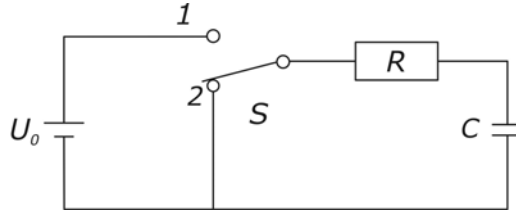
Opgave 1.1 Lading op een condensator

- Leg in woorden uit wat het betekent als een bepaalde condensator een grotere capaciteit heeft dan een andere.
- Bereken de hoeveelheid lading die wordt opgeslagen in een condensator van 33 nF als je er een spanning over zet van 12 V.
- Laat zien dat de eenheid farad hetzelfde is als coulomb/volt (C/V).

¹ We behandelen de condensator hier kort. Zie voor een uitgebreidere behandeling je natuurkundeboek.

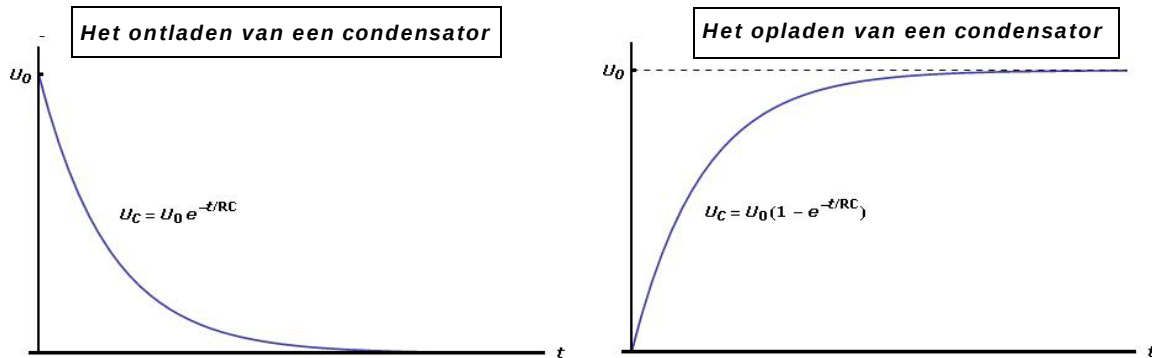
Op- en ontladen van een condensator

Als je de twee polen van een opgeladen condensator via een weerstand of een lampje met elkaar verbindt, zal de opgeslagen lading door de weerstand wegstromen. Daarbij wordt elektrische energie (aanwezig doordat er lading in de condensator is opgeslagen) omgezet in warmte. In onderstaande figuur zie je een schakeling waarmee je dat kunt laten zien.



figuur 1-3

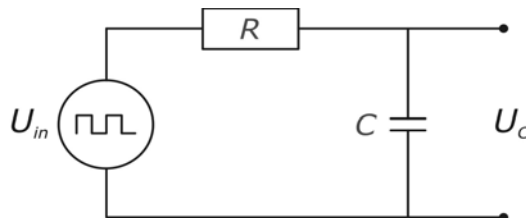
Stel dat schakelaar S in stand 1 staat. De condensator is dan opgeladen en de spanning erover is U_0 . Als je op het tijdstip $t = 0$ de schakelaar omschakelt naar stand 2, zal de condensator zich over de weerstand ontladen. De lading op de condensator, en dus de spanning erover, zal uiteindelijk nul worden, maar dat gebeurt niet onmiddellijk. In onderstaande grafiek links zie je hoe het niet af. In de tekening zie je ook de formule die het ontladen beschrijft. Deze leiden we hier niet af.



figuur 1-4

Ook het opladen van een condensator via een weerstand gebeurt niet momentaan. In de rechter grafiek hierboven zie je hoe het dat gebeurt.

Als je schakelaar S in figuur 1-3 regelmatig heen en weer schakelt, zet je in feite een blokvormige spanning die afwisselend 0 en U_0 is op de schakeling met R en C. Je kunt dat natuurlijk handiger doen door de batterij en de schakelaar te vervangen door een toongenerator die een blokspanning levert, zoals in figuur 1-5 is te zien.



figuur 1-5

Opgave 1.2 Een blokspanning op een condensator

- Schets de spanning over de condensator als functie van de tijd als je er een blokspanning op zet zoals in figuur 1-5. Neem aan dat de periode van de blokspanning groot is t.o.v. de op- en ontladtid van de condensator.
- Hoe verandert je tekening als je de frequentie van de blokspanning vergroot of verkleint?

Het verband tussen stroom en spanning voor een condensator

Tijdens het op- of ontladen van de condensator stroomt er in een tijdje Δt een veranderlijke hoeveelheid lading ΔQ door de aansluitdraden. Je noemt de hoeveelheid lading per tijdseenheid de *stroomsterkte* I . In formulevorm:

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{formule 1-2}$$

Omdat I bij het op- en ontladen niet constant is moeten we I nemen op één tijdstip t en dat kun je doen door de limiet te nemen voor $\Delta t \rightarrow 0$:

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{formule 1-3}$$

Als je formule 1-1 en formule 1-3 combineert, vind je het verband tussen de spanning over een condensator en de oplaadstroom:

$$I_c = C \frac{dU_c}{dt} \quad \text{formule 1-4}$$

Deze formule hebben we in de volgende hoofdstukken nodig om te kunnen begrijpen wat er gebeurt als je een condensator in een schakeling opneemt.

Opgave 1.3 Een condensator ontladen

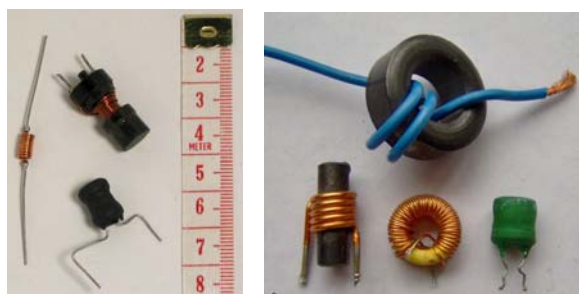
Een condensator met een capaciteit van $50 \mu\text{F}$ wordt opgenomen in de schakeling van figuur 1-3, waarin $R = 5 \text{ k}\Omega$ en $U_0 = 7 \text{ V}$. Aanvankelijk staat de schakelaar in stand 1 en is de condensator helemaal opgeladen.

- Hoeveel lading zit er dan op de condensator?
- Op tijdstip $t = 0$ wordt de schakelaar omgezet naar stand 2.
- Hoeveel lading zit er nog op de condensator op $t = 0,1 \text{ s}$? En op $0,25 \text{ s}$? Gebruik hier de formule uit figuur 1-4.
- Hoe lang duurt het voordat 99% van de lading op de condensator is weggestroomd?
- Hoe groot is de stroomsterkte op $t = 0,2 \text{ s}$?

Uit dit alles blijkt dat het niet mogelijk is momentaan de spanning over een condensator te veranderen, het zal altijd even duren voordat een nieuwe spanningstoestand is bereikt. En omdat in een wisselspanningschakeling de spanning voortdurend verandert, kun je verwachten dat een condensator zich in zo'n schakeling heel anders gedraagt dan een weerstand!

1.2 De spoel

Een spoel² is eigenlijk een elektromagneet die je in een schakeling opneemt. Zo'n spoel/elektromagneet bestaat uit een stuk geïsoleerd elektriciteitsdraad dat om een kern gewonden is. Als de kern van ijzer is, of een ander magnetiseerbaar materiaal, versterkt dat de magnetische eigenschappen van de spoel. In het plaatje hieronder zie je foto's van een aantal spoelen.



Bron: Wikipedia. figuur 1-6

² Kijk de theorie van het magnetisch veld in een spoel na in je natuurkundeboek!

Een spoel die is opgenomen in een elektrische schakeling, heeft bijzondere eigenschappen omdat er een wisselwerking is tussen de stroom door de spoel en het magnetische veld dat door die stroom gegenereerd wordt.

Schematisch wordt een spoel (symbool L) als volgt weergegeven:



figuur 1-7

Inductie

Je weet natuurlijk dat je een magneet kunt maken door een spanning te zetten op een spoel, zodat er een stroom door gaat lopen. In de spoel ontstaat dan een magnetisch veld. Zo'n magnetisch veld kun je weergeven door *veldlijnen* te tekenen.

Een van de grote ontdekkingen van de natuurkunde is dat je ook omgekeerd een elektrische spanning kunt genereren door het magneetveld in een spoel te *veranderen*. Dat verschijnsel heet inductie. De bekendste toepassing hiervan is de dynamo.

Hoe ontstaat een *inductiespanning*?

Als een spoel in een extern magneetveld zit, zal dit magneetveld door het oppervlak van elke winding prikken. We zeggen: de winding omvat een bepaalde *magnetische flux* Φ . Die flux is gelijk aan het product van de oppervlakte A die door een winding wordt omvat en de component van de magnetische veldsterkte B loodrecht op A .

$$\Phi = B_{\perp} \cdot A \quad \text{formule 1-5}$$

Als de omvatte flux verandert, bijvoorbeeld doordat het externe magneetveld sterker of zwakker wordt, zal de spoel zich daartegen verzetten door een stroom in de spoel te genereren die een magneetveld veroorzaakt dat de verandering tegenwerkt. Dit heet de *wet van Lenz*. Dit betekent dat er een spanning over de uiteinden van de spoel ontstaat, een *inductiespanning*. Die spanning ontstaat door de fluxverandering in elke winding. De grootte van de inductiespanning over de hele spoel met N windingen wordt gegeven door de *inductiewet van Faraday*:

$$U_{ind} = N \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| \quad \text{formule 1-6}$$

De absolute waardetekens staan er omdat je met deze formule alleen de grootte van de inductiespanning kunt vinden. De richting volgt uit de wet van Lenz: de ontstane spanning werkt de oorzaak van zijn ontstaan tegen.

Opgave 1.4 Een spoel in een magneetveld

Een spoel van 300 windingen, met een windingsoppervlak van $3,0 \text{ cm}^2$, wordt in een magneetveld van $0,10 \cdot 10^{-5} \text{ T}$ geplaatst.

- Bereken de flux in de spoel als het magneetveld evenwijdig aan de as van de spoel loopt.
- Het magneetveld wordt nu in $0,1 \text{ s}$ verminderd tot 0. Hoe groot is de (gemiddelde) inductiespanning in de spoel?

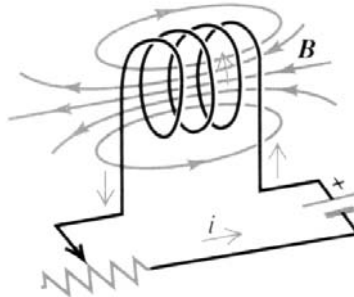
Zelfinductie

Als een spoel wordt opgenomen in een gelijkstroomkring gaat er door de spoel een gelijkstroom lopen. Vaak wordt de weerstand van een spoel (R_L) verwaarloosd, dan geldt dus $R_L = 0$.

We spreken in dit geval over een *ideale spoel*. Maar als de weerstand van de spoel nul is, zal er geen spanning over de spoel staan, ook al loopt er een constante stroom door. Dit volgt direct uit de wet van Ohm: $U = I \cdot R_L$!

Maar als de gelijkstroom wordt *aangezet*, neemt de stroom toe en dus ontstaat er een magneetveld in de spoel. Volgens de wet van Lenz wekt die een inductiespanning op die zijn ontstaan, de beginnende stroom, tegenwerkt. Dat heet zelfinductie. Het duurt daardoor enige tijd voordat de stroom op zijn volle sterkte is.

Ook als je de stroomsterkte door de spoel groter of kleiner wilt maken, bijvoorbeeld met de schakeling van figuur 1-8, ontstaat er een inductiespanning. De reden daarvan is de volgende. De stroom wekt in de spoel een magneetveld op en dus zal de spoel een magnetische flux omvatten.



figuur 1-8

Als de stroomsterkte door de spoel verandert, zal ook de omvatte flux veranderen en dus zal er een inductiespanning worden opgewekt die de verandering van de stroomsterkte tracht tegen te gaan.

De door de spoel met N windingen omvatte flux is evenredig met de stroomsterkte I :

$$N \Phi = L I$$

formule 1-7

De evenredigheidsconstante L wordt de *coëfficiënt van zelfinductie* genoemd, en ook wel kortweg de *zelfinductie*. De eenheid van L is de *henry* (H).

De grootte van L hangt af van de geometrie van de spoel (het oppervlak van de windingen, het aantal windingen per lengte-eenheid etc.), maar ook sterk van het al dan niet aanwezig zijn van een magnetiseerbare kern in de spoel, want de omvatte flux verandert als zo'n kern aanwezig is.

De zelfinductie L is de belangrijkste eigenschap van een spoel. Je kunt spoelen kopen of zelf maken waarvan L in de orde van grootte ligt van ca. 0,1 H tot ca. 10 mH.

Opgave 1.5 De coëfficiënt van zelfinductie

- Toon aan dat $1 \text{ H} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2/\text{A}$
- Ga na of L groter of kleiner wordt als je een weekijzeren kern in een spoel aanbrengt.
- Idem als je de windingen van een spoel gedeeltelijk over elkaar heen legt in plaats van naast elkaar (de spoel wordt dan dus korter).

We zagen al eerder dat er over een ideale spoel waardoor een gelijkstroom loopt geen spanning staat. Dus de enige spanning die over de spoel kan bestaan, is de zelfinductiespanning die ontstaat als de stroomsterkte verandert.

De grootte van die spanning vind je door formule 1-6 en formule 1-7 te combineren:

$$U_{ind} = L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

formule 1-8

Als je de limiet neemt voor $\Delta t \rightarrow 0$, wordt dit:

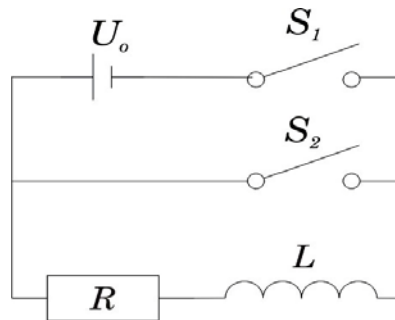
$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

formule 1-9

In de volgende hoofdstukken is deze formule belangrijk voor het begrijpen van schakelingen waarin een spoel is opgenomen.

De stroom door een spoel veranderen

We nemen een ideale (weerstandsloze) spoel en een weerstand, samen met een spanningsbron en twee schakelaars, op in de schakeling van figuur 1-9.



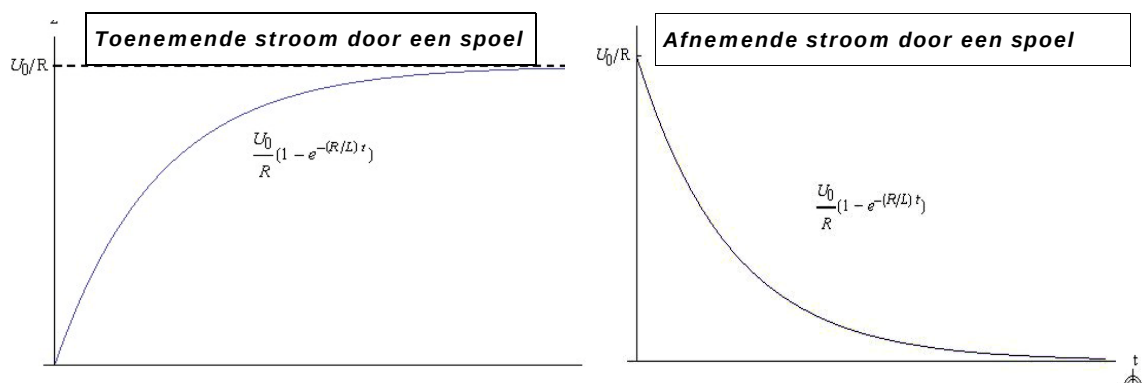
figuur 1-9

Als je op het tijdstip $t = 0$ schakelaar S_1 sluit, zal er een stroom gaan lopen door de spoel en de weerstand. Na verloop van tijd wordt de stroomsterkte gelijk aan U_0/R (we noemen deze stroomsterkte voortaan I_0), maar dat gebeurt niet meteen zoals we in de vorige paragraaf zagen!

Opgave 1.6 Stroom door een spoel

- Waarom wordt de stroomsterkte uiteindelijk gelijk aan $I_0 = U_0/R$?
- Leg uit waarom de stroom niet **meteen** gelijk wordt aan I_0 . Gebruik daarbij de begrippen inductiespanning en zelfinductie.

In figuur 1-10 links zie je het verloop van de stroomsterkte als functie van de tijd. In de tekening zie je ook de formule die het verloop van de stroomsterkte als functie van de tijd beschrijft. We zullen deze formule niet afleiden.



figuur 1-10

Stel je voor dat er sinds het sluiten van schakelaar S_1 al zoveel tijd verlopen is dat de stroomsterkte intussen gelijk geworden is aan I_0 . We definiëren nu een nieuw tijdstip $t = 0$, waarop we schakelaar S_2 sluiten (en tegelijk S_1 openen om kortsluiting te voorkomen). De stroomsterkte wordt dan gelijk aan nul, maar niet onmiddellijk. In figuur 1-10 rechts zie je hoe het wel gebeurt.

Uit deze twee figuren blijkt duidelijk dat het niet mogelijk is om de stroomsterkte door een spoel momentaan te veranderen. Als je de figuren vergelijkt met die van het op- en ontladen van een condensator, zie je een duidelijke overeenkomst. Alleen ging het bij de condensator over de spanning en bij de spoel over de stroom.

Opgave 1.7 Verloop van de stroomsterkte

In de schakeling van figuur 1-9 is $R = 3,0 \text{ k}\Omega$, $L = 0,20 \text{ mH}$ en $U_0 = 5,0 \text{ V}$.

a. Schakelaar S_1 wordt gesloten. Bereken I_0 .

Na lange tijd wordt op $t = 0$ schakelaar S_2 gesloten.

b. Bereken op welk tijdstip de stroomsterkte door de spoel gehalveerd is. Gebruik de formule die in figuur 1-10 is opgenomen.

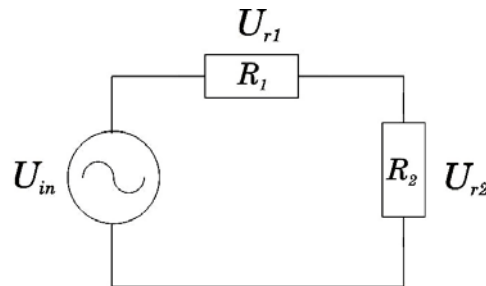
c. Bereken hoe groot de spanning over de spoel op dat moment is.

We hebben nu gezien dat zowel de spoel als de condensator niet momentaan reageren als je de stroom of de spanning probeert te veranderen. Het is daarom te verwachten dat de spoel en de condensator zich heel anders gedragen dan een weerstand als je er een wisselspanning over zet of er een wisselstroom door laat lopen; dan veranderen spanning en stroom immers voortdurend!

Dit blijkt heel duidelijk uit de volgende demonstratieproef.

1.3 Demonstratie: optellen van spanningen gaat fout?

We gaan meten aan een heel simpele schakeling, die van figuur 1-11:



figuur 1-11

Als spanningsbron gebruiken we een toongenerator die sinusvormige spanningen kan genereren. We zorgen dat de ingangsspanning een sinusvormige spanning is met een frequentie van ca. 1 kHz.

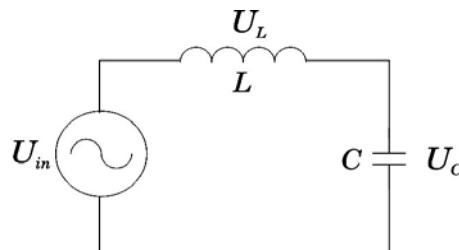
Spanningen U_{R1} , U_{R2} en U_{in} worden gemeten met een multimeter.

We willen weten of de spanningen over beide weerstanden samen gelijk zijn aan de ingangsspanning, dus of:

$$U_{in} = U_{R_1} + U_{R_2} \quad \text{formule 1-10}$$

Dit blijkt inderdaad te kloppen, tenminste als we rekening houden met de beperkte nauwkeurigheid van de meters.

Vervolgens doen we dezelfde meting met de volgende schakeling:



figuur 1-12

Als we de spanningen meten met de universeelmeter blijkt heel duidelijk dat nu niet meer geldt dat de spanning over de spoel en de condensator samen gelijk zijn aan de ingangsspanning:

$$U_{in} \neq U_C + U_L \quad \text{formule 1-11}$$

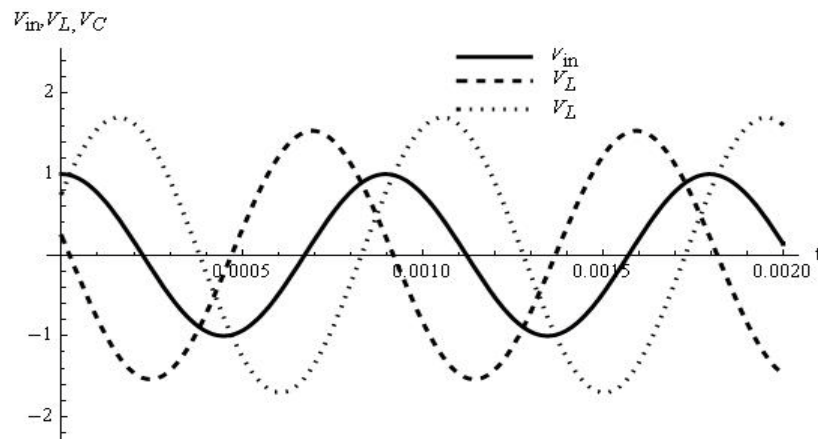
Hoe kan dat?

Om dit te begrijpen, bekijken we de verschillende spanningen met een oscilloscoopprogramma op de computer. Dan blijkt dat de spanningen over L en C opgeteld wel degelijk gelijk zijn aan de ingangsspanning, maar alleen als je ze als functie van de tijd neemt:

$$U_{in}(t) = U_C(t) + U_L(t) \quad \text{formule 1-12}$$

De multimeter meet *effectieve* spanningen en die mag je kennelijk niet zomaar optellen. Hoe komt dat?

Uit het computerbeeld blijkt dat de drie spanningen een faseverschil hebben! Ook blijken de spanningen over L en C soms (veel) groter te zijn dan de ingangsspanning U_{in} . Een typisch plaatje zie je hieronder. Hierin is de zwarte doorgetrokken lijn de ingangsspanning U_{in} , de stippellijn is de spanning over de condensator U_C en de streepjeslijn die over de spoel U_L .



figuur 1-13

Uit dit proefje blijkt nog iets heel belangrijks: als U_{in} een sinusvormige spanning is, dan zijn ook I , U_C en U_L sinusvormig met dezelfde frequentie als U_{in} .

Opgave 1.8 Behoud ieder soort spanning zijn vorm?

- Beredeneer dat een blokvormige wisselspanning die je op de schakeling van figuur 1-12 zet, zijn vorm niet behoudt.
- Wat verwacht je bij een driehoekvormige spanning?

Wisselspanning op schakelingen met condensatoren en spoelen

De schakeling van figuur 1-12 is een eerste eenvoudig voorbeeld van een schakeling die opgebouwd is met weerstanden, spoelen en condensatoren. Het is belangrijk om te begrijpen hoe die schakelingen reageren op sinusvormige wisselspanningen en -stromen. Later zal blijken dat dit meestal sterk afhankelijk is van de frequentie van wisselspanningen en stromen. En als je bedenkt dat bijvoorbeeld muziek bestaat uit geluid van verschillende frequenties, kun je begrijpen dat dit soort schakelingen veel voorkomt in geluidsapparatuur. Zo kun je de kwaliteit van het geluid beïnvloeden.

Om schakelingen als deze goed te begrijpen moeten we meer weten over sinusvormige functies, bijvoorbeeld hoe je die moet optellen en vermenigvuldigen.

Daarom gaan we daar eerst goed naar kijken voordat we verder gaan rekenen en meten aan schakelingen waarin condensatoren en spoelen voorkomen.

Opgave 1.9 Wat zijn we nu verder gekomen?

In de inleiding van dit hoofdstuk werd de vraag gesteld: welke eigenschappen hebben de condensator en de spoel als je ze opneemt in een gelijkstroomschakeling en in een wisselstroomschakeling?

- Formuleer het antwoord op deze vraag zoals je dat nu hebt gevonden. Je zou dat bijvoorbeeld kunnen doen door een samenvatting van dit hoofdstuk te schrijven.
- Welk stukje van de 'modulevraag' uit de inleiding kun je nu al beantwoorden?

1.4 Hoe meet je de grootte van wisselspanningen en wisselstromen?

Sinusvormige spanningen variëren als volgt in de tijd:

$$U(t) = U_0 \sin(2\pi f t)$$

formule 1-13

Hierin is:

U_0 de *amplitude* van de spanning (in V)

f de *frequentie* van de spanning (in Hz)

Je kunt formule 1-13 ook anders schrijven, omdat ook vaak andere grootheden worden gebruikt in plaats van de frequentie f .

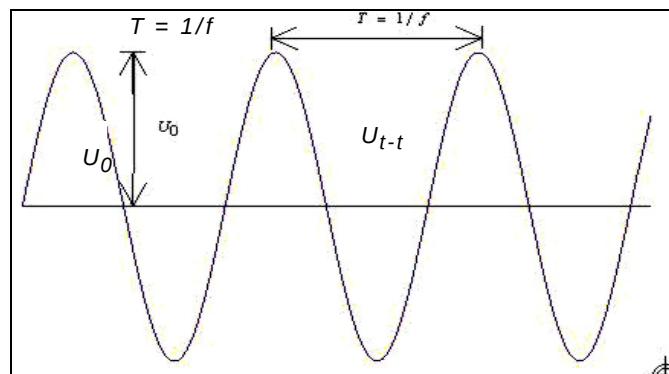
ω (spreek uit: omega) de *hoekfrequentie* (in rad/s), waarvoor geldt $\omega = 2\pi f$.

T de *periode* (in s), waarvoor geldt $T = 1/f$.

Opgave 1.10 Je kunt het ook anders schrijven

Schrijf ook formules op voor $U(t)$ waarin niet de frequentie f maar de hoekfrequentie ω of de periode T worden gebruikt.

In het volgende plaatje zie je verschillende grootheden geïllustreerd:



figuur 1-14

Nu is in de theorie de amplitude U_0 wel een handige maat om de grootte van een wisselspanning te meten, maar in de praktijk worden vaak andere maten gebruikt.

Met een oscilloscoop meet je meestal de *top-top-spanning*, U_{t-t} , dat is de (verticale) afstand van de top van de sinus tot het dal.

Opgave 1.11 Spanning meten met een oscilloscoop

- Waarom is de amplitude moeilijk te meten met een oscilloscoop?
- Wat is het verband tussen U_{t-t} en U_0 ? Wat is de eenheid van U_{t-t} ?

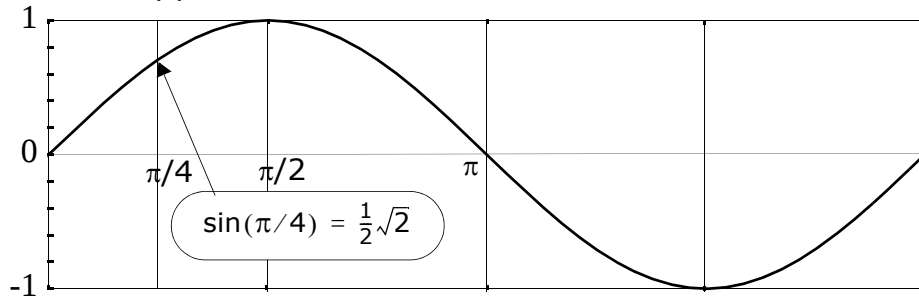
Een andere veel gebruikte maat voor de grootte van een sinusvormige spanning is de *effectieve waarde*.

Omdat je de gemiddelde waarde van een sinus niet kunt gebruiken als maat (*waarom niet?*), wordt vaak de gemiddelde waarde van het *kwadraat* van de sinus als maat gebruikt. De *wortel* daaruit heet de effectieve waarde. De Engelse term voor effectieve waarde is *RMS*, *Root Mean Square*, dat sluit dus heel mooi aan bij deze definitie!

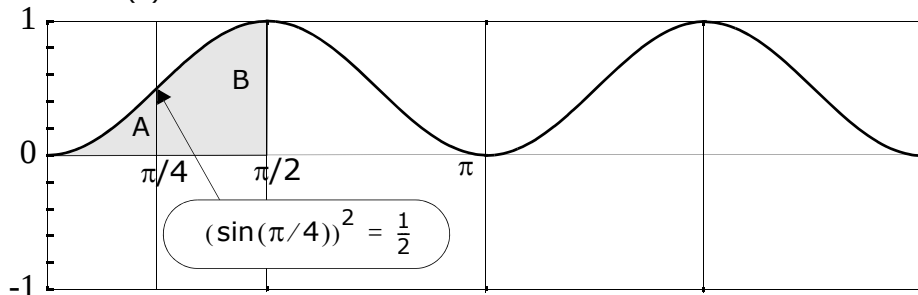
Nu is het gemiddelde van $\sin^2 \omega t$ gelijk aan 0,5. Daarvan staat op de volgende pagina een verklaring.

Het gemiddelde van $\sin^2(x)$ is gelijk aan 0,5. Waarom?

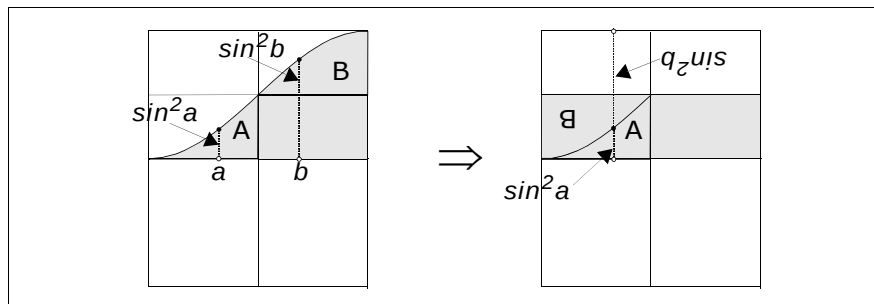
De grafiek van $\sin(x)$



En die van $\sin^2(x)$



Het lijkt wel alsof A en B in elkaar passen:



Dat is zo! Want:

Neem a en b aan twee kanten op gelijke afstand van $\pi/4$.
 Dan geldt $a + b = \pi/2$.
 Dus:
 $\sin^2 a + \sin^2 b = \sin^2 a + \sin^2(\pi/2 - a) = \sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

De oppervlakte onder de grafiek van $\sin^2 x$ is gelijk aan de oppervlakte van een rechthoek met hoogte 0,5. Het gemiddelde van $\sin^2 x$ is dus 0,5.

Opgave 1.12 Rekenen met effectieve waarde

- Toon aan dat de effectieve waarde van wisselspanning $U_0 \sin \omega t$ gelijk is aan $U_0 / (\sqrt{2})$.
- Bereken de top-top-waarde van de sinusvormige netspanning in Nederland. De effectieve waarde hiervan is 230 V (en de frequentie is 50 Hz).

1.5 Netwerken

De schakelingen met weerstanden, spoelen en condensatoren waar we aan gaan rekenen en meten worden meestal netwerken genoemd. Een voorbeeld van een netwerk zag je al in figuur 1-12. Heel algemeen wordt een netwerk getekend als in figuur 1-15.



figuur 1-15

Zo'n netwerk³ heeft een ingang en een uitgang. Op de ingang wordt een spanning gezet, die dan de ingangsspanning, U_{in} , wordt genoemd. Op de uitgang staat de uitgangsspanning, U_{uit} . In het netwerk van figuur 1-12 kan de condensatorspanning de uitgangsspanning zijn. In een later hoofdstuk zul je andere voorbeelden van netwerken zien.

Heel algemeen kun je zeggen dat het doel van een netwerk is de ingangsspanning te bewerken. Het bewerkte signaal is dan het uitgangssignaal. Een voorbeeld van een netwerk is een geluidsversterker; dat is een netwerk dat de ingangsspanning groter maakt.

Bij het ontwerpen en bestuderen van netwerken worden U_{in} en U_{uit} meestal gemeten met een oscilloscoop. De verhouding U_{in}/U_{uit} wordt de *versterking* G (van het Engelse *gain*)⁴ van het netwerk genoemd, dus:

$$G = \frac{U_{uit}}{U_{in}}$$

formule 1-14

Opgave 1.13 De versterking

Wat is de eenheid van G ?

In de theorie van netwerken kunnen de in- en uitgang ook elektrische stromen zijn. Vandaar dat vaak de termen *in-* en *uitgangssignaal* worden gebruikt. Dan laat je in het midden of je het hebt over een spanning of een stroom.

In het dagelijkse leven komen dit soort netwerken veel voor, bijvoorbeeld je geluidsversterker thuis. Hetingangssignaal daarvan is de spanning die uit je cd-speler komt. Het uitgangssignaal gaat naar de luidsprekers.

Een ander voorbeeld van een netwerk in je geluidsinstallatie is de toonregeling.

Opgave 1.14 In- en uitgangssignalen

- Wat zijn het in- en uitgangssignaal van een toonregeling?
- Wat is het in- en uitgangssignaal van een cd-speler?
- Wat is het in- en uitgangssignaal van een radio?

Een belangrijk onderwerp van deze module zal zijn: hoe kun je het uitgangssignaal van een netwerk berekenen als je het ingangssignaal kent en als je weet hoe het netwerk opgebouwd is. Een andere belangrijke, vaak moeilijker vraag is: hoe moet ik een netwerk ontwerpen dat ingangssignalen op een gewenste manier verandert? Dit komt in deze module wel aan bod, maar slechts zeer beperkt.

³ In dit boek worden de woorden 'netwerk' en 'schakeling' vaak gebruikt, soms zelfs voor dezelfde schakeling. Als je 'netwerk' gebruikt, leg je meer de nadruk op de functie van de schakeling. Als je 'schakeling' gebruikt gaat het eerder om de componenten waaruit het netwerk is opgebouwd.

⁴ Als de versterking kleiner is dan één zou het misschien logischer zijn dit *verzwakking* te noemen, maar ook dan praat je over de *versterking* G .

1.6 Berekeningen met weerstandsnetwerken

Deze paragraaf bevat, naast de begrippen *netwerk* en *versterking*, alleen toepassingen van de wet van Ohm in serie- en parallelschakelingen van weerstanden en is daarom heel geschikt voor zelfstudie.

Een korte samenvatting van de benodigde formules:

Voor gelijkspanningen én voor wisselspanningen geldt de wet van Ohm:

$$U = I \cdot R \quad \text{formule 1-15}$$

Samen met de regels voor in serie geschakelde weerstanden:

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad \text{formule 1-16}$$

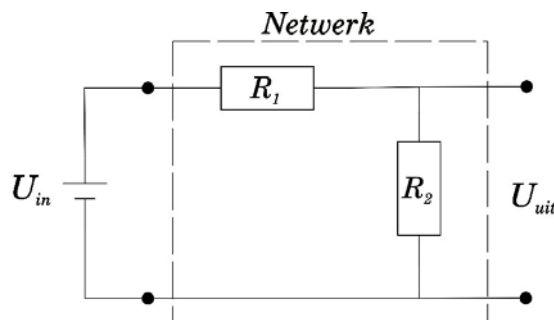
en voor parallel geschakelde weerstanden:

$$1/R_{tot} = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 + \dots \quad \text{formule 1-17}$$

kunnen allerlei netwerkberekeningen gedaan worden.

De spanningsdeler

We bestuderen de schakeling uit figuur 1-16, een zogenaamde spanningsdeler. Dit netwerk zorgt ervoor dat de uitgangsspanning een bepaald deel is van de ingangsspanning, vandaar de naam. Hoe groot dat deel is, wordt bepaald door de grootte van R_1 en R_2 .



figuur 1-16

Deze schakeling is een voorbeeld van een *weerstandsnetwerk* met een *ingangsspanning* U_{in} en een uitgangsspanning U_{uit} . Het ingangssignaal is U_{in} . In dit geval is het uitgangssignaal gelijk aan de spanning over weerstand R_2 :

$$U_{uit} = U_{R_2} \quad \text{formule 1-18}$$

Terug naar de schakeling van figuur 1-16. Hierin is de stroom I die door weerstand R_1 loopt gelijk aan de stroom door weerstand R_2 . Het is niet moeilijk om uit te rekenen hoe groot die stroom is; we gebruiken daarvoor de regel voor in serie geschakelde weerstanden en de wet van Ohm:

$$I = \frac{U_{in}}{R_1 + R_2} \quad \text{formule 1-19}$$

Dezelfde wet van Ohm kun je ook gebruiken om de spanning over weerstand R_2 , de *uitgangsspanning* U_{uit} , uit te rekenen:

$$U_{uit} = I \cdot R_2 \quad \text{formule 1-20}$$

Als we formule 1-19 en formule 1-20 combineren, krijgen we:

$$U_{uit} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{in} \quad \text{formule 1-21}$$

Het is de moeite waard eens goed naar formule 1-21 te kijken. Je ziet dat de uitgangsspanning U_{uit} gelijk is aan de ingangsspanning U_{in} , vermenigvuldigd met de factor $R_2/(R_1+R_2)$.

Deze factor is voor iedere mogelijke waarde van R_1 en R_2 een getal tussen 0 en 1! Afhankelijk van de waarden van R_1 en R_2 is de uitgangsspanning dus altijd een deel van de ingangsspanning. Van daar dat de schakeling van figuur 1-16 *spanningsdeler* genoemd wordt.

Opgave 1.15 De spanningsdeler

Neem in figuur 1-16: $U_{in} = 6,5 \text{ V}$, $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ en $R_2 = 7 \text{ k}\Omega$.

- Bereken de uitgangsspanning.
- Bereken de versterking.
- Je wilt nu R_2 door een andere weerstand vervangen zó dat de uitgangsspanning de helft is van de ingangsspanning. Welke waarde van R_2 moet je dan kiezen?

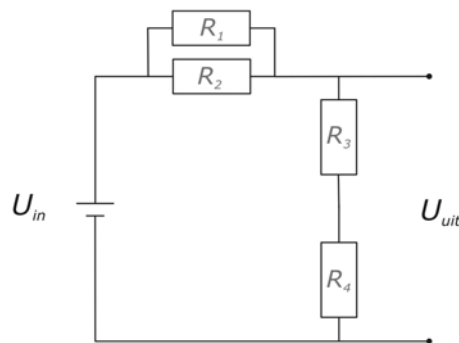
Vaak wordt formule 1-21 als volgt geschreven:

$$G = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad \text{formule 1-22}$$

Hierin is G de versterking van de spanningsdeler.

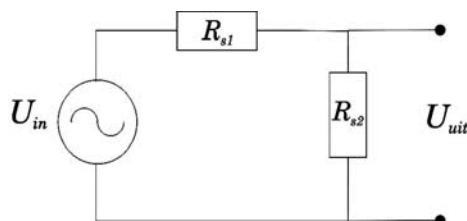
1.7 Een complexer netwerk

Kijk eens naar het volgende netwerk:



figuur 1-17

Op het eerste gezicht lijkt dit veel ingewikkelder dan de schakeling van figuur 1-16. Maar je kunt de twee parallel geschakelde weerstanden R_1 en R_2 vervangen door één vervangingsweerstand R_{s1} en de twee in serie geschakelde weerstanden R_3 en R_4 door één vervangingsweerstand R_{s2} en dan ziet de schakeling er zo uit:



figuur 1-18

En dit is precies dezelfde schakeling als die in figuur 1-17!

Opgave 1.16 Berekening van de versterking

Neem aan dat de componenten in figuur 1-17 de volgende waarden hebben:

$R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 1,8 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 950 \Omega$, $R_4 = 1,4 \text{ k}\Omega$.

Bereken de versterking van het netwerk van figuur 1-17.

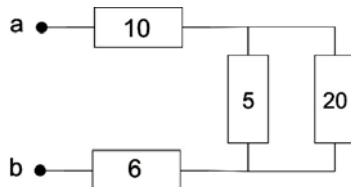
1.8 Huiswerk

Opgave 1.17

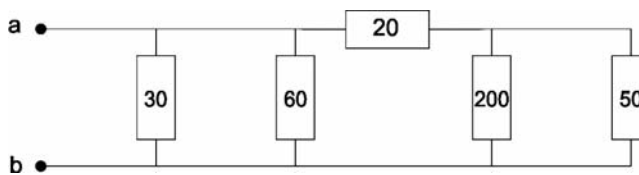
Bereken de vervangende weerstand van onderstaande twee weerstandsnetwerken tussen a en b . Het getal dat je in de weerstanden ziet is steeds de grootte van de weerstand in Ω .

Deze opgaven komen 'mooi' uit.

a.



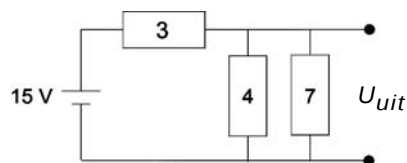
b.



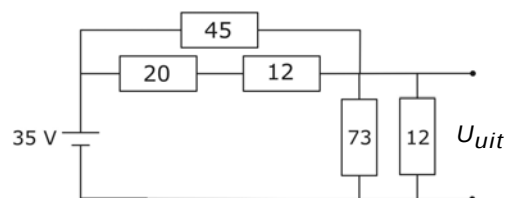
Opgave 1.18

Bereken de versterking van de volgende drie netwerken. Deze opgaven komen *niet* 'mooi' uit.

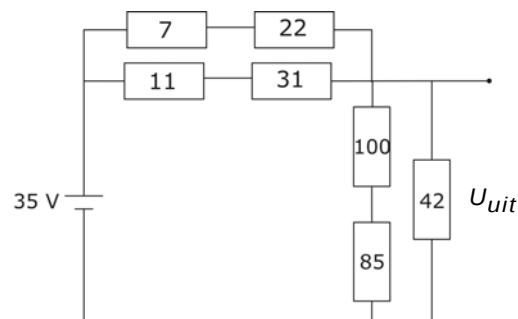
a.



b.



c.



Hoofdstuk 2. Sinussignalen onder de loep



Onderwerpen in dit hoofdstuk

- sinus- en cosinusbeweging als aanzichten van draaibeweging
- signaalformules en faseverschillen
- twee sinussignalen optellen met het fasediagram
- afgeleiden bepalen met draaiende vectoren

Inleiding op dit hoofdstuk en vraagstelling

In het vorige hoofdstuk heb je gezien dat de signalen in wisselstroomschakelingen sinusvormig in de tijd verlopen. Schakelelementen hadden verschillende invloed op het signaal: het kon in amplitude gewijzigd worden, maar werd soms ook in de tijd verschoven. De frequentie van het signaal veranderde echter niet.

Voor onderzoek van ingewikkelder schakelingen is het nodig dat we goed met signalen kunnen rekenen.

De centrale vraag in dit hoofdstuk is dan ook: hoe kunnen sinusvormige signalen met verschillende amplituden en verschillende startmomenten, maar met gelijke frequenties, bij elkaar optellen. Komt er weer een sinusoidale uit? Wat is de bijhorende amplitude en wat is de positie ervan ten opzichte van de uitgangssignalen?

Door de op en neer gaande sinusbeweging te beschouwen als een draaibeweging die van opzij gezien wordt, krijgen we daar goed grip op, maar ook op de relatie van sinus en cosinus onderling en in hun afgeleiden. Precies dat hebben we nodig om in een volgend hoofdstuk beter te kunnen rekenen aan eenvoudige wisselstroomschakelingen. En om daarna onze nieuwe getallen (de complexe) te kunnen bouwen, die het mogelijk maken ook van ingewikkelder schakelingen de werking te verklaren.

2.1 De feiten over sinus en cosinus

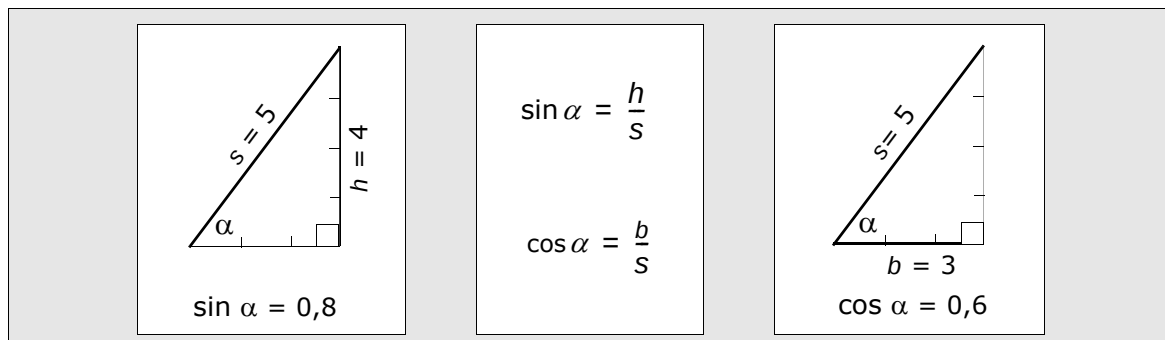
Vooraf, en wat je weten moet

Wisselspanningen en -stromen beschrijven we met behulp van sinus- of cosinusfuncties. Bij wisselstroomschakelingen moet je die signalen bij elkaar kunnen optellen, ook als ze ten opzichte van elkaar verschoven liggen, dus als de toppen en dalen niet samenvallen.

De basiseigenschappen van de sinus en de cosinus komen in deze eerste paragraaf nog even in een notendop langs.

sinus en cosinus in de rechthoekige driehoek

Zo ben je de sinus en cosinus eerder tegengekomen: als verhoudingen in een rechthoekige driehoek:



figuur 2-1

Strikt genomen ligt α hier tussen 0° en 90° . We gaan nu de *sinus* en *cosinus* vastleggen voor alle mogelijke hoeken, ook hoeken die een draai voorstellen van meer dan 360° . En voor negatieve hoeken!

$\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ voor alle mogelijke waarden van α ; radialen en de eenheidscirkel

In deze figuur zie je wat $\sin(\alpha)$ en $\cos(\alpha)$ zijn voor andere waarden van α .

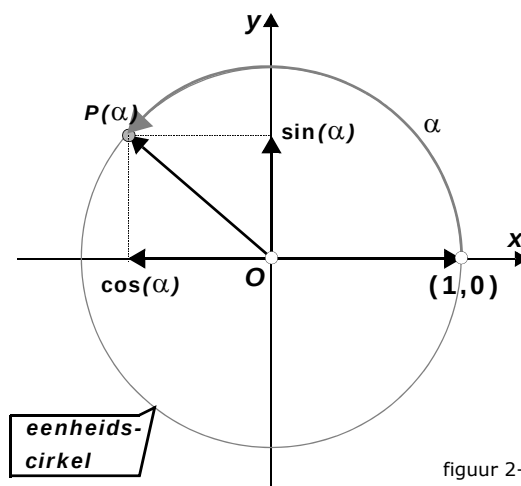
Je kiest het punt $P(\alpha)$ op de eenheidscirkel; de hoek α is die hoek die de pijl van O naar $(1, 0)$ tegenkloks gedraaid is, om op P te komen.

Afspraak radialen

We meten de hoek α in **radialen**, d.w.z. als de lengte van de afgelegde boog op de eenheidscirkel.

Afspraak sin en cos

$\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ zijn de xy -coördinaten van $P(\alpha)$.



figuur 2-2

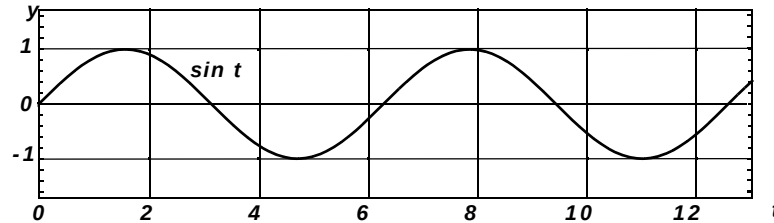
Gevolgen:

1. De rechte hoek is $\pi/2$; de volle draai is 2π .
2. De absolute waarde van $\cos(\alpha)$ en $\sin(\alpha)$ weet je, volgens de 'oude' afspraak in het driehoekje tussen PO en de x -as. De tekens vind je door te kijken in welk kwadrant $P(\alpha)$ ligt.
3. Hoek α mag zo groot zijn als je wilt; α mag ook negatief zijn, je draait dan de andere kant op.
4. Als je 2π bij α optelt, maakt dat voor de waarde van de sinus en cosinus niet uit.
De functies sinus en cosinus zijn periodiek modulo 2π .
Dus $\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin(\alpha)$, $\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos(\alpha)$ voor alle gehele waarden van k .

De grafieken van de sinus en de cosinus

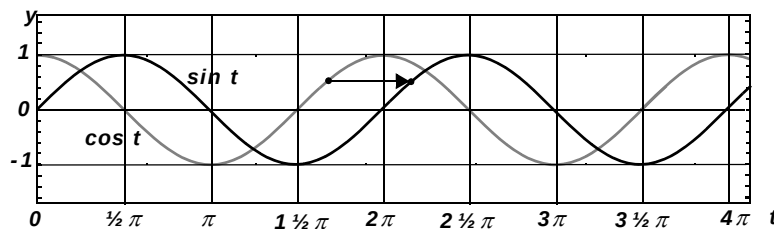
In het vervolg krijgen we te maken met hoeken die afhankelijk zijn van de tijd t . Vaak zal de hoek gelijk zijn aan een constante maal t ; hier nemen we even de waarde 1 voor de constante.

Een grafiek van de functies $\sin(t)$ zie je in onderstaande afbeelding.



figuur 2-3

Deze grafiek is dezelfde, maar met andere markeringen op de t -as. De grafiek van $\cos(t)$ is toegevoegd.



figuur 2-4

Samenhangen tussen de sinus- en de cosinusfunctie

Uit de stelling van Pythagoras en figuur 2-2 met de $\sin$ en $\cos$ bij de eenheidscirkel volgt:

$$(\sin t)^2 + (\cos t)^2 = 1. \quad \text{formule 2-1}$$

In figuur 2-4 kun je aan het pijltje goed zien dat $\cos$ en $\sin$ nog op een andere manier samenhangen. Zó:

$$\cos(t) = \sin(t + \frac{1}{2}\pi). \quad \text{formule 2-2}$$

Dat kun je zonder formule zo zeggen: op tijdstip t heeft de cosinus al de waarde, die de sinus pas $\frac{1}{2}\pi$ later heeft. Of, kort gezegd: de $\cos$ ligt $\frac{1}{2}\pi$ vóór op $\sin$.

In de rechthoek van figuur 2-1 zit de hoek $90^\circ - \alpha$ in de top. De sinus daarvan is dus $\frac{b}{s}$, hetzelfde als de cosinus van α . Dus ook geldt:

$$\cos(\alpha) = \sin(90^\circ - \alpha). \quad \text{formule 2-3}$$

Deze formule is heel geschikt in de context van meetkunde en driehoeken, maar niet bij het werken aan elektrische schakelingen. Daar hebben we namelijk met het verloop van de tijd van doen. En tijd beweegt maar in één richting, maar (α) en $(90^\circ - \alpha)$ veranderen in tegengestelde richtingen als α verandert.

Opgave 2.1 Opgaven ter oefening en afsluiting

- a. Verklaar waarom geldt: $1^\circ = \frac{2\pi}{360}$ radialen. Vul aan: 1 radiaal = graden.

Bepaal de omrekeningsconstanten in vier cijfers nauwkeurig. Onthoud ze!

- b. Laat met figuren zien dat $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ en $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ en bereken ook $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

- c. Bereken $\sin(t)$ en $\cos(t)$ als $t = 13\pi$, $1001\frac{1}{2}\pi$, $-3\frac{3}{4}\pi$.

- d. Verklaar met behulp van figuur 2-2 dat $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$ en $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$.

- e. Verklaar met behulp van figuur 2-4 dat $\cos(t + \frac{1}{2}\pi) = -\sin(t)$.

2.2 Draaibeweging, faseverschillen

Vooraf

In deze paragraaf gaan we verder met de kijk op de sinus en cosinus, zoals die in figuur 2-2 is neergezet. Het nieuwe is dat we punt P nu laten draaien over een cirkel, met mogelijk een andere straal dan 1.

Het beeld van een draaiend punt en de bijhorende beschrijving van de beweging met sinusformules is een kernpunt bij het rekenen aan elektrische schakelingen, dat zal later blijken!

Driewiekmolens



Opgave 2.2 Een bekend type molen, van opzij gezien in zeven opeenvolgende standen

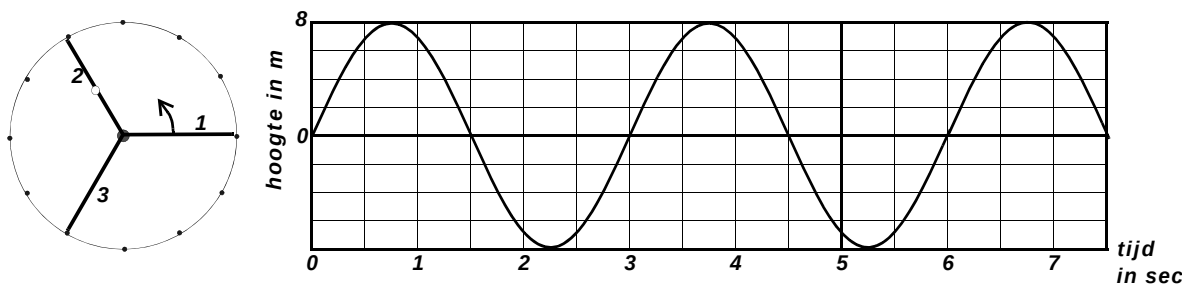
Volg je één wiekpunt met je ogen, dan zie je alleen één op- en neergaande beweging. In werkelijkheid draaien de wiekpunten met vaste snelheid over een cirkel, maar van opzij is het beeld heel anders. Zo lijkt het van een afstand bijvoorbeeld dat elke wiek in het hoogste punt even stilstaat.

- Het begin van het volgen van de wiekpunten is aangegeven. Maak dit af voor de drie wieken.
- Als twee wiekpunten op gelijke hoogte zijn, staat de derde in een uiterste stand, boven of onder. Dat lijkt zo op de foto's, maar is dat echt zo? Zo ja, geef een verklaring.

Faseverschillen

Opgave 2.3 Drie wieken voor en na elkaar, nu exact!

Wiek 1 begint (op $t = 0$) op hoogte 0 meter t.o.v. het midden. Een volle draai duurt in dit voorbeeld 3 seconden. Het verloop van de hoogte van wiekpunt 1 in de tijd is afgebeeld in de grafiek.



figuur 2-5

- Wiekpunt 2 is bij de start al op het punt waar wiekpunt 1 pas na één seconde is. Waarom?
- Teken nauwkeurig de grafieken voor wiekpunt 2 en 3 in dezelfde figuur.

fase, faseverschil, fasehoek

De grafieken die bij wiek 2 en wiek 3 horen, zijn eigenlijk hetzelfde als die van wiek 1. De wieken maken ook precies dezelfde beweging. Maar er is toch een verschil: de tweede wiek ligt voor op de eerste. Die wiek is in een andere *fase* dan de eerste.

Opgave 2.4 Fase als deel van een periode of als tijdverschil

In dit geval kun je twee dingen zeggen:

- (i) de tweede wiek ligt $1/3$ periode vóór op de eerste wiek.
- (ii) de tweede wiek ligt 1 seconde vóór op de eerste wiek.

Als de wind toeneemt, blijft nog maar één van deze twee beweringen waar. Welke en waarom?

De gewoonte is dat we het *faseverschil* aangeven met *wat je ziet gebeuren* bij de molen: het uit fase liggen is zichtbaar in het hoekverschil. We zeggen:

wiek 2 ligt $\frac{2\pi}{3}$ in fase vóór op wiek 1.

We kunnen ook zeggen:

de fasehoek van wiek 1 is op $t = 0$ gelijk aan 0 en die van wiek 2 gelijk aan $\frac{2\pi}{3}$.

Opgave 2.5 De fasen van de derde wiek

Wat is het faseverschil van wiek 3 ten opzichte van wiek 1? Verschillende antwoorden zijn mogelijk!

Ook bij andere periodieke verschijnselen, zoals wisselstroom en wisselspanning, spreekt men van *faseverschil*, ook al is er geen echte draaiing of hoek te bekenen.

Zo gek is dat niet. Periodieke verschijnselen lopen als het ware in een rondje: na één periode zijn ze weer in dezelfde toestand, op dezelfde plek, op dezelfde spanning, en herhaalt het kringetje zich weer. De fase, of het verschil, wordt dus heel natuurlijk gezien als deel van een cirkel. Kortom: een hoek in radialen.¹

Opgave 2.6 Faseverschillen bij spoelen en condensatoren

Bepaal de faseverschillen tussen U_{in} , U_C en U_L in de grafiek van figuur 1-13 op bladzijde 13.

Aanwijzing: bepaal welk *deel* van de periode het faseverschil is en reken dan om naar *radialen*.

De relativiteit van het vóórlopen in fase

Bij de tweede wiekpunt kon je zeggen dat die $\frac{4\pi}{3}$ in fase achterloopt op de eerste. 'Hij loopt $\frac{2\pi}{3}$ vóór op de eerste wiek', is net zo goed waar. Omdat het over ver in de tijd uitgestrekte bewegingen gaat, en niet om een individueel moment, maakt dat eigenlijk niets uit. Mooier dan door John O'Mill kan het niet verteld worden:

*Er was eens een kaasboer in Gouda,
die zat om de tafel zijn vrouw na.
Maar die riep heel lief:
"Alles is relatief,
als ik iets harder loop, zit ik jou na."*

¹ Zoals je ziet is 'fase' hier een hoek. Mogelijk heb je eerder fase(verschil) bij natuurkunde leren kennen als een getal dat je kon uitrekenen met de formule t/T (bij trillingen) of met x/λ (bij golven). Je krijgt 'onze' fase(hoek) door deze formules met 2π te vermenigvuldigen.

2.3 Draaibewegingen in formules

We gaan nu de eenparige cirkelbeweging in een koppel van twee formules beschrijven; een formule voor de verticale richting en een voor de horizontale richting.

Je kunt de snelheid van de cirkelbeweging beschrijven met de werkelijke snelheid van het bewegend punt. Maar alle punten van de wiek van de molen hebben steeds dezelfde afgelegde hoek en doen dit op verschillende afstanden van het midden. Daarom zullen we de snelheid liever definiëren als *verandering van hoek per tijdseenheid*, oftewel: *hoeksnelheid*.

De hoeksnelheid

De hoeksnelheid van een draaiing is de hoek (in radialen) die de draaiende straal per tijdseenheid doorloopt. Voor de hoeksnelheid kiezen we dezelfde letter ω als voor de *hoekfrequentie* in hoofdstuk 1; niet voor niets, de samenhang wordt spoedig duidelijk.

Opgave 2.7 Snelheid van de wiekpunt en van de wind; bereken de hoeksnelheid

In werkelijkheid heeft de wiektip een vaste snelheid; die is bij een moderne molen 6 maal de windsnelheid. Dat heeft met de wiekvorm te maken; bij de tip maakt het wiekoppervlak een helling van 1 op 6 met het vlak van de cirkel waarin de tip beweegt.

Ga nu bij de grafiek op bladzijde 24 uit van 8 meter tussen middelpunt en wiektip.

- Wat is daar de werkelijke snelheid van de tip van de wiek?
- Wat is de windsnelheid in deze situatie?
- Bereken ook de *hoeksnelheid* van de molen in radialen per seconde.

De fasehoek ϕ

Ook de startpositie van de punten van de wiek kan met een hoek aangegeven worden. Deze geven we aan met de letter ϕ . In het wiekenvoorbeeld is de starthoek van wiek 1 gelijk aan 0 en voor wiek 2 geldt $\phi = \frac{2\pi}{3}$. Dat is de fasehoek van de draaiing, het verschil met de draaiing die op niveau 0 start.

Opgave 2.8 De stand van de wiek is een hoek die van de tijd afhangt

Als de hoeksnelheid ω , de startstand ϕ en het tijdstip t bekend zijn, kan hoek α , die de stand van de wiek op tijdstip t aangeeft, berekend worden. Stel de formule op die α in ω , ϕ en t uitdrukt.

Opgave 2.9 Hoeveel omwentelingen per seconde?

De hoeksnelheid van de wiek is ω ; dat betekent ook: de wiek legt ω radialen per seconden af.

Leg uit waarom de wiek $\frac{\omega}{2\pi}$ omwentelingen per seconden maakt.

Hoeksnelheid en hoekfrequentie, vaak gelijk maar toch niet altijd hetzelfde!

De draaiende wieken vormen een periodiek verschijnsel. De *frequentie* ervan, het aantal ronden per seconde, geven we aan met f . In paragraaf 1.4 heb je gezien dat de frequentie bij sinussignalen vaak op deze manier in de formule terecht komt: $U(t) = U_0 \sin(2\pi f t)$. Het was daarom handig voor $2\pi f$ een nieuw symbool te kiezen; dat was *per definitie* de *hoekfrequentie* ω .

Uit opgave 2.9 blijkt nu duidelijk dat een draaibeweging met *hoeksnelheid* ω een periodiek verschijnsel is met een frequentie $f = \omega/(2\pi)$, en dat de bijhorende *hoekfrequentie* óók de grootte ω heeft.

Bedenk wel dat de redenering in opgave 2.9 alléén opgaat als de hoeksnelheid constant is. Er zijn veel periodieke verschijnselen in de natuur waar je heel zinnig van frequentie f kunt spreken, waar je heel nuttig de hoekfrequentie kunt definiëren via $f = \omega/(2\pi)$, maar waar geen vaste hoeksnelheid in werkelijkheid valt waar te nemen.

Een voorbeeld is de beweging van de aarde om de zon. De hoeksnelheid daarvan is, zoals gezien vanuit de zon niet constant, is namelijk op zijn grootst rond 4 januari en op zijn kleinst rond 4 juli.

Het verschil is wel 7 %! (Het komt doordat de aarde op 4 januari dichtbij de zon staat en op 4 juli juist verder weg is.) De frequentie f van de periodiek omloop om de zon is wél heel constant, namelijk precies één omloop per jaar. De hoekfrequentie van de omlopende aarde is dan per definitie net zo constant: 2π per jaar! Dit wil dus zeggen dat de voerstraal zon-aarde inderdaad 2π per heel jaar rondzwaait, maar dat niet met constante hoeksnelheid doet.

In dit boek tref je de term *hoeksnelheid* alleen aan als het om echte (of wiskundige) draaibewegingen gaat en het woord *hoekfrequentie* als het om het periodieke karakter van een verschijnsel gaat²

Periode, frequentie, hoekfrequentie: samenhangen

Je hebt in paragraaf 1.4 de drie grootheden frequentie f , hoekfrequentie ω en periode T , die bij sinusoidale signalen of draaibewegingen de aard van de periodiciteit bepalen al leren kennen. Ze hangen algebraïsch samen.

Opgave 2.10 Overzicht

Zoek de beschrijvingen op en controleer alle formules hieronder.

$f \cdot T = 1$	$\omega \cdot T = 2\pi$
$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{T}$	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
	$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$

formule 2-4

De uitwijking: A , R , r of nog iets anders

De maximale uitwijking van de hoogte van de wiektip ten opzichte van de wiekas in het voorbeeld was 8 meter. Dat is natuurlijk de straal van de cirkel waarover de wiektip loopt. In dit boek zie je voor die grootheid verschillende letters gebruikt worden: soms inderdaad de straal R (of r) van een cirkel, soms de A van amplitude, als het om een uitwijking gaat en heel vaak ook U_0 (voor spanning) en I_0 als amplituden van wisselspanning of -stromen.

Opgave 2.11 De hoogteformule

In figuur 2-2 was de straal van de cirkel 1; de hoogte van punt $P(\alpha)$ bij hoek α was $\sin(\alpha)$.

- a. Leg nu uit waarom bij een cirkelbeweging met straal r , hoeksnelheid ω , en starthoek ϕ op tijdstip t de hoogte ten opzichte van de x -as van het draaiend punt gegeven wordt door:

$$y(t) = r \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

formule 2-5

- b. Vind nu door invullen van de juiste waarde voor de straal r , de hoeksnelheid ω , de starthoek ϕ de drie formules voor de wiekpunten van het windmolenvoorbeeld.

Opgave 2.12 De formule voor de horizontale beweging

Bij de formule $y(t) = r \cdot \sin(\omega t + \phi)$ voor de verticale beweging kan zonder veel moeite de formule voor de horizontale beweging opgesteld worden. Vul zelf aan:

$$x(t) = \dots\dots\dots$$

formule 2-6

² Het is natuurlijk niet erg handig dat ω twee verschillende grootheden beschrijft die ook nog dezelfde eenheid hebben, maar daar zullen we mee moeten leven. Sterrenkundigen doen het beter: die gebruiken hier echt twee verschillende variabelen! Niet alle natuurkunde (school)boeken zijn er zo precies over. In deze module zul je er verder geen last van hebben.

2.4 De algemene sinusoïde-formule en een vooruitblik op sinussignalen

De formule

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

formule 2-7

is de algemene formule voor een sinusoïde met evenwichtsstand 0 en maximale uitwijking A . A is dus niet per se een straal, A kan ook een spanning of stroom zijn!

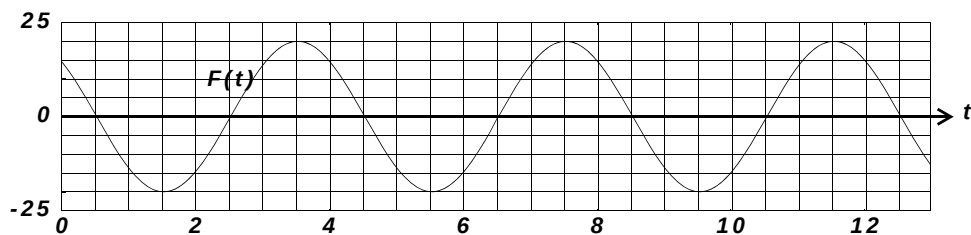
Het zijn precies deze formules die wisselstromen en -spanningen in schakelingen beschrijven. In de schakelwereld heten ze *sinussignalen*.

Bij wisselspanningsschakelingen is het van belang dat we weten wat de samenstelling is van twee verschillende sinussignalen met dezelfde frequentie, maar met verschillende amplitude en fase. Dat is niet zo eenvoudig, het is ook helemaal niet van meet af aan zeker dat er weer een sinus signaal ontstaat!

De grote truc zal blijken te zijn: bekijk het signaal $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ zoals we dat in dit hoofdstuk doen, als de verticale component van een draaibeweging. Want draaibewegingen zijn veel overzichtelijker dan de golfbeweging zelf.

Voor we dat doen, bekijken we hoe we uit een in een grafiek gegeven sinussignaal de formule kunnen bepalen. Het is handig daarbij de typisch natuurkundige grootheden frequentie en periode te gebruiken; die herhalen we nog even, en leggen daarbij een extra wiskundig accent.

Opgave 2.13 Formule maken bij een sinussignaal

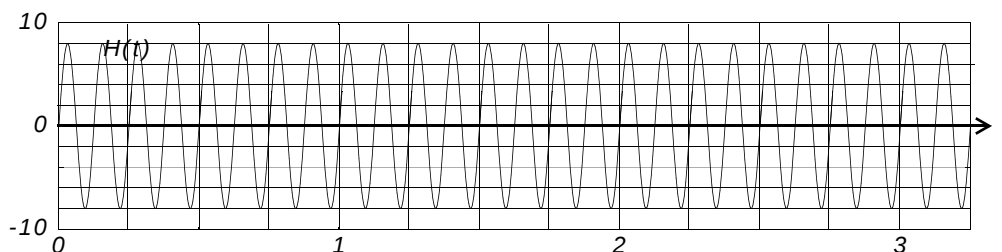


De bedoeling is een formule te vinden van de vorm $F(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ die bij de grafiek hoort.

- A en T zijn makkelijk uit de figuur af te lezen. Vanuit T bepaal je nu ω .
- Voor het bepalen van de fasehoek ϕ is het hier makkelijk om te kijken *welk deel van een periode* van de sinusgolf al voorbij is als $t = 0$. Tellen van hokjes geeft hier: $3/8$ deel. De fasehoek is dan $3/8$ van de hoek van een volle draai van 2π . Maak de formule nu af.

Opgave 2.14 Hogere frequentie

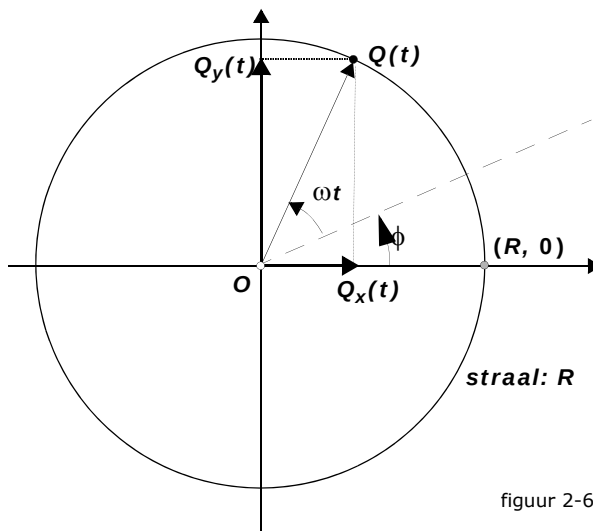
- Bij werkelijke schakelingen treden vaak hogere frequenties op. In dit voorbeeld is de frequentie degene die je gemakkelijk uit de grafiek afleest.



- Stel de formule voor $H(t)$ op.

2.5 Draaiing: sinus én cosinus!

Waarnemers van boven en opzij zien een punt Q bewegen



Een waarnemer die van (ver) opzij tegen de windmolen aankeek, ziet alleen de hoog-laag-beweging. De links-rechtsbeweging is van voren wel zien, maar blijft voor deze waarnemer verborgen. Een waarnemer die van boven kijkt, ziet die beweging juist wél en de op-neer-beweging niet. De links-rechtsbeweging beschrijven we nu met de tweelingzussen sinus en cosinus.

Het echte belang zit in de samenwerking van de twee bewegingen.

In deze figuur zie je de *verticale* en de *horizontale* uitwijkingen aangegeven van een over een cirkel om O draaiend punt $Q(t)$, met hoeksnelheid ω , faseverschuiving ϕ en straal R .

Op tijdstip t is de positie van $Q(t)$ dus:

$$Q(t) \begin{cases} Q_x(t) = R \cdot \cos(\omega t + \phi) \\ Q_y(t) = R \cdot \sin(\omega t + \phi) \end{cases}$$

formule 2-8

Omdat het een cirkelbeweging is,

*zien beide waarnemers dezelfde beweging,
maar zien ze de uiterste standen en evenwichtsstanden niet op dezelfde tijden.*

Een bekend verband tussen cosinus en sinus komt terug

Opgave 2.15 We onderzoeken het verband met een tabel

In deze tabel wordt gestart op het moment dat punt Q in $(R, 0)$ is aangekomen. De volgende momenten zijn steeds een kwartperiode verder.

	Q is in $(R, 0)$	steeds één kwartperiode later					
verticaal: $R \cdot \sin(\omega t + \phi)$	0	R					
horizontaal: $R \cdot \cos(\omega t + \phi)$	R						

- Vul de tabel verder in.
- Loopt de cos-functie nu een kwartperiode vóór, of juist áchter op de sin-functie?
- Verklaar nu:

$$R \cdot \cos(\omega t + \phi) = R \cdot \sin(\omega t + \phi + \pi/2) \quad \text{formule 2-9}$$

De straal R kunnen we wel uit dit verband weglaten. Als we voor $\omega t + \phi$ kortweg x schrijven, is dat het bekende verband:

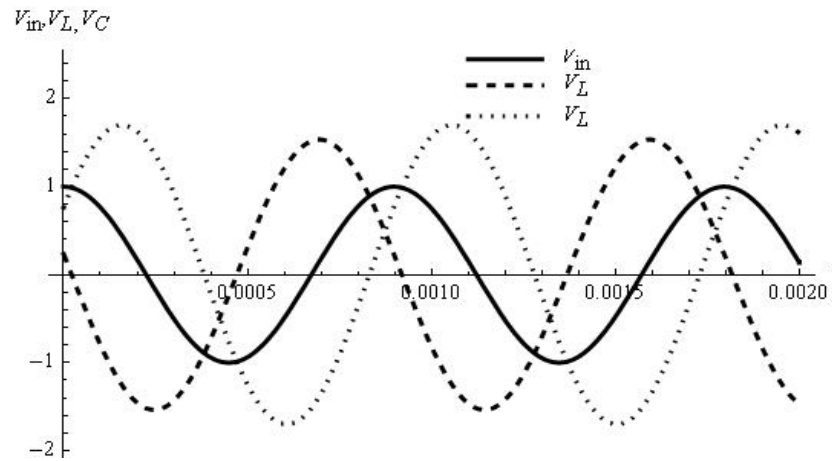
$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2) \quad \text{formule 2-10}$$

Precies wat we eerder zagen, in formule 2-2.

2.6 Sinussignalen met *gelijke* hoekfrequenties optellen

In deze paragraaf gaan we de wiskunde opbouwen die we op bladzijde 13 misten, om de allereerste wisselstroomschakeling echt te begrijpen.

De grafiek waar het om ging is hier nogmaals afgebeeld.



figuur 2-7

U_{in} , U_L en U_C zijn functies van de tijd, t .

Uit de schakeling in figuur 1-12, bladzijde 12, volgt dat $U_{in}(t) = U_L(t) + U_C(t)$.

Opgave 2.16 Consequenties van $U_{in} = U_L + U_C$

Verklaar:

- De snijpunten van de grafieken van U_{in} en U_L vallen op de momenten dat $U_C = 0$.
- De snijpunten van de grafieken van U_{in} en U_C vallen op de momenten dat $U_L = 0$.
- Als $U_{in} = 0$, zijn U_L en U_C elkaars tegengestelde.

De samenhangen die in deze opgave te zien zijn, treden alleen op omdat $U_{in}(t) = U_L(t) + U_C(t)$; het sinuskarakter speelt hier geen rol.

We willen echter wel wat meer weten. We gaan in de rest van dit hoofdstuk bewijzen:

als twee van de drie van U_{in} , U_L en U_C sinusoïden met dezelfde frequentie zijn, dan is de derde ook een sinusoïde met diezelfde frequentie.

We gaan ook uitzoeken hoe die derde berekend kan worden als de eerste twee bekend zijn.

twee terzijdes

Voor al onze schakelingen zal gelden dat alle signalen in de schakeling sinusoïden zijn met dezelfde hoekfrequentie.

De kritische lezer zal opmerken dat in het voorbeeld van hierboven wél gegeven is dat de ingangsspanning een sinusoïde is – die komt namelijk uit de toongenerator – maar dat het helemaal niet van meet af aan duidelijk is dat ook maar één van $U_L(t)$ en $U_C(t)$ inderdaad een sinusoïde is. Dat is echter wél zo, en we maken er ook verder constant gebruik van. De wiskundige machinerie om dit echt te onderbouwen wordt aangeduid in *appendix A, bladzijde 125*.

In *appendix B*, bladzijde 129, wordt ingegaan op het samenstellen van signalen met ongelijke frequenties. Daar wordt ook aangegeven wat dit met het maken van muziek van doen heeft.

2.7 Optellen van sinussignalen

We hebben gezien dat een sinusvormig signaal opgevat kan worden als één component van een draaibeweging. Nu gaan we bij de optelling van twee signalen $A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$ en $A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$ deze draaibewegingen gebruiken.

We doen dus alsof de signalen de y -componenten zijn van draaibewegingen.

Dat betekent eigenlijk:

We 'verrijken' de verticale signalen

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) \quad \text{en} \quad A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$$

elk met een horizontale component, dus met respectievelijk

$$A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1) \quad \text{en} \quad A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2) \dots$$

Zo ontstaan de draaiende punten

$$Q_1(t) \quad \quad \quad i \quad \quad Q_2(t).$$

Opgave 2.17 Twee cirkelbewegingen optellen

In deze figuur zie je de twee draaiende punten Q_1 en Q_2 , beide op een of ander moment t .

Spoedig blijkt: *het doet er voor de berekening niet toe welk moment dat is.*

- a. De verticale component van $Q_1(t)$ is op de y -as aangegeven met v_1 . Markeer ook v_2 en de horizontale componenten h_1 en h_2 op de x -as.

Nu gaan we het somsignaal opbouwen vanuit deze vier componenten.

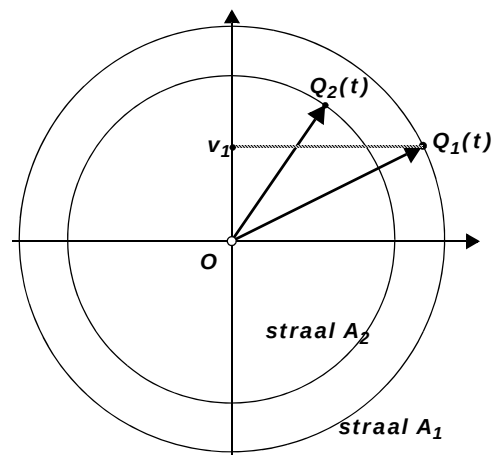
- b. Vind door de v - en de h -componenten apart op te tellen de v_3 - en h_3 -component van het somsignaal $Q_3(t)$. Geef ze aan met – uiteraard – v_3 en h_3 . Teken ook het punt $Q_3(t)$.

$Q_3(t)$ is bepaald door optelling van de horizontale en verticale componenten. Wat we willen aantonen is dat het figuurtje $OQ_1Q_3Q_2$ tijdens de draaibeweging vaste vorm en grootte heeft.

- c. Waarom is het driehoekje OQ_1Q_2 tijdens de draaiing vast in vorm en grootte?

- d. Toon nu aan: vierhoek $OQ_1Q_3Q_2$ is een parallellogram met vaste vorm.

(Tip: Het lijntje OQ_1 is diagonaal van een rechthoek. En Q_2Q_3 ?)



figuur 2-8

Conclusie: Q_3 is ook een draaiend punt, bewegend met dezelfde hoeksnelheid als Q_1 en Q_2 .

- e. Leg uit waarom er getallen A_3 en ϕ_3 bestaan, zó dat:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) &= A_3 \cdot \sin(\omega t + \phi_3) \\ A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2) &= A_3 \cdot \cos(\omega t + \phi_3) \end{aligned}$$

formule 2-11

Samenvattende opmerking: optellen van vectoren

Het optellen via pijlen uit O met het parallellogram is het bekende *optellen van vectoren*.

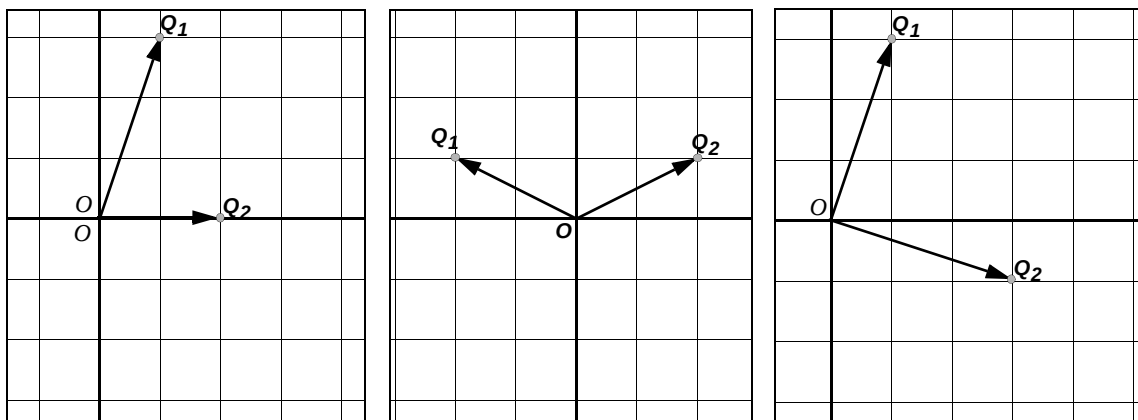
Je kunt ook de kop-staartmethode toepassen: je verschuift Q_2 zó, dat de staart aan de kop van Q_1 komt. Of andersom: je verschuift Q_1 zó, dat de staart aan de kop van Q_2 komt. Het eindpunt is beide keren Q_3 .

2.8 De som van twee signalen tekenen en berekenen

We weten nu dat twee sinusvormige signalen samen weer een sinusvormig signaal vormen. Dat is nu wiskundig aangetoond, maar voor het werken met schakelingen is het van cruciaal belang.

Opgave 2.18 Voorbeelden in een rooster

In onderstaande drie figuren zijn steeds posities van de draaiende punten Q_1 en Q_2 gegeven op het tijdstip $t = 0$. De groottes kun je met behulp van het rooster bepalen, de hokjes zijn 1 bij 1; cm als je wilt. De hoekfrequentie is voor beide punten dezelfde, ω ; die is verder niet gespecificeerd. Bedenk dat elk draaiend punt bij een verticaal sinussignaal hoort, de zogenaamde projectie van de punten op de verticale as.



figuur 2-9

Bepaal voor deze drie gevallen:

- de positie van punt Q_3 op het gegeven moment $t = 0$.
- de formule voor de verticale component van Q_3 , dus v_3 .

Je moet dus de amplitude én de fase bepalen; en voor zover dat exact kan inderdaad exact.

Opgave 2.19 Toon aan dat:

$$\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{12}\right)$$

formule 2-12

Speciale situaties

Bij de bijzondere voorbeelden van opgave 2.18 kon je de amplitude A_3 van het somsignaal exact bepalen. In het algemene geval zijn A_3 en ook ϕ_3 ook wel te berekenen; verderop in dit hoofdstuk laten we dat zien. Maar we hebben het eigenlijk niet nodig; omdat de wiskunde die verderop in dit boek voorkomt (namelijk: de complexe getallen), deze resultaten als een spin-off oplevert. Als de A 's en de ϕ 's bijzondere onderlinge verbanden hebben, is het mogelijk de nieuwe fase en amplitude direct te vinden.

Opgave 2.20 Gelijke fase, tegenfase

In het geval dat $\phi_2 = \phi_1$ of $\phi_2 = \phi_1 + \pi$ zien de samenstellingsformules er eenvoudig uit. De eerste is gemakkelijk. Stel zelf de tweede op.

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) &= (A_1 + A_2) \cdot \sin(\omega t + \phi_1) \\ A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_1 + \pi) &= (\dots\dots\dots) \cdot \sin(\omega t + \phi_1) \end{aligned}$$

Opgave 2.21 Een algemene constatering

De gevallen van opgave 2.20 zijn een soort uitersten: helemaal samen in fase of helemaal tegen elkaar in. In het algemeen ligt A_3 tussen de uitersten in.

Overtuig jezelf met een tekening op de manier van figuur 2-8 van het volgende

- dat (als $A_2 \leq A_1$) voor A_3 geldt: $A_1 - A_2 \leq A_3 \leq A_1 + A_2$
- dat alléén in de uiterste gevallen (van opgave 2.20) de gelijkheden optreden.

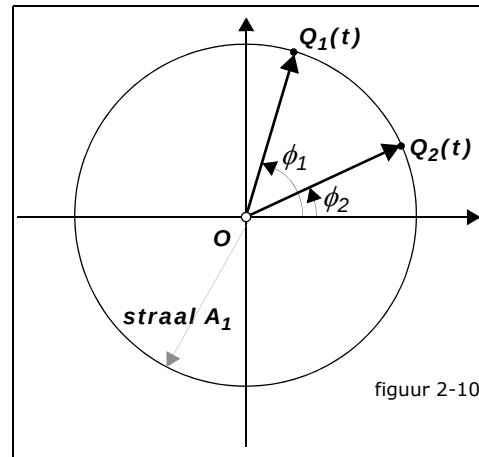
Opgave 2.22 Gelijke amplituden, $A_1 = A_2$

Als $A_1 = A_2$, dan is het parallellogram in de figuur een *ruit*. Zie de figuur hiernaast.

In de figuur is de situatie getekend voor $t = 0$. Dan zijn de fasehoeken juist de hoeken ten opzichte van de positieve x -as, zoals aangegeven.

- Construeer de vector voor het somsignaal $Q_3(t)$; teken de hele ruit met beide diagonalen.

- Ga na dat $\phi_3 = \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}$, $A_3 = 2A_1 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$.



Vanuit deze verbanden bouwen we de formule voor de verticale component op:

$$A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) = 2 \cdot A_1 \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

formule 2-13

- Noteer ook de bijpassende relatie voor de horizontale componenten.

Door in formule 2-13 eens $t = 0$ en $A_1 = 1$ te kiezen, ontstaan de *regels* voor het optellen van sinuswaarden en cosinuswaarden van twee hoeken, die naar Simson (1687 - 1768) zijn genoemd:

$$\begin{aligned} \sin(\phi_1) + \sin(\phi_2) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \\ \cos(\phi_1) + \cos(\phi_2) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right) \end{aligned}$$

formule 2-14

Opgave 2.23 Een bijzondere formule

Voor zogenaamde *krachtstroom* (bijvoorbeeld voor zware elektromotoren en lasapparatuur) wordt geen wisselspanning op twee draden gebruikt, maar op drie. De fasenverschillen zijn daarbij dan steeds $2\pi/3$ tussen twee draden. De spanningen zijn (met uiteraard $f = 2\pi\omega = 50\text{Hz}$):

$$\begin{aligned} L_1(t) &= 230 \cdot \sin(\omega t) \\ L_2(t) &= 230 \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3) \\ L_3(t) &= 230 \cdot \sin(\omega t + 4\pi/3) \end{aligned}$$

- Toon aan: de verschilspanning tussen twee van de drie heeft een amplitude van zo'n 400 volt.
- Toon (met enig tekenwerk) aan dat $L_1 + L_2 + L_3 \equiv 0$.

Samenvatting en vooruitblik

We weten nu zeker dat twee sinusvormige signalen met dezelfde hoekfrequentie samen weer een sinusvormig signaal vormen. Voor het werken met schakelingen is het van cruciaal belang. Je hebt al gezien dat bij een condensator de afgeleide van de spanning een grote rol speelt en bij de spoel de afgeleide van de stroom. Goede reden om eens nauwkeurig te kijken naar de afgeleiden van sinusvormige functies/signalen. Zijn die misschien zelf óók weer sinusoiden?

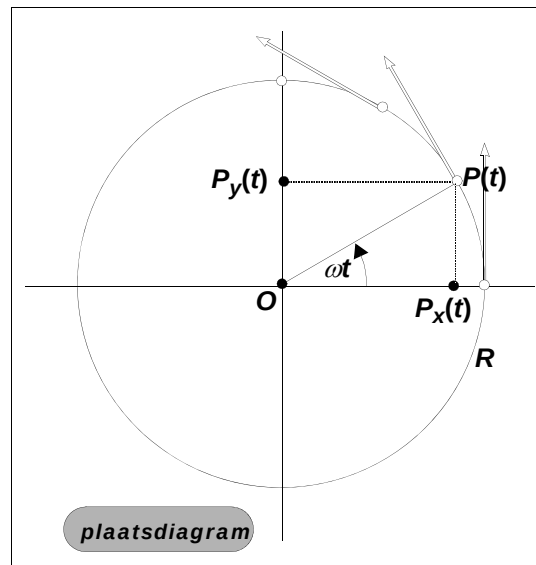
2.9 Ware snelheden en afgeleiden

Positiediagram met snelheidspijlen

Gegeven een cirkelbeweging van een punt P met hoeksnelheid ω rad/sec en straal R van de cirkel. De fase in dit voorbeeld is 0 (maar je kunt bij elke sin of cos een fase $+\phi$ toevoegen). P wordt dus beschreven door:

$$P(t): \begin{cases} P_x(t) = R \cdot \cos(\omega t) \\ P_y(t) = R \cdot \sin(\omega t) \end{cases}$$

De witte pijlen geven op drie momenten de snelheid van punt P aan, in richting en grootte. Het zijn *snelheids-vectoren*.



Opgave 2.24 Richting en grootte van de snelheid

- a. Je weet – net als bij de molenwiekpunt – hoeveel *afstand per tijdseenheid* punt P langs de cirkel aflegt.
Druk dat uit in R , ω en/of t .
Dit is de *grootte* van de snelheidsvector.

Omdat P over een cirkel beweegt, weet je ook iets over de *richting* van de snelheidsvectoren.

- b. Beschrijf die richting nauwkeurig ten opzichte van de richting van pijl OP .

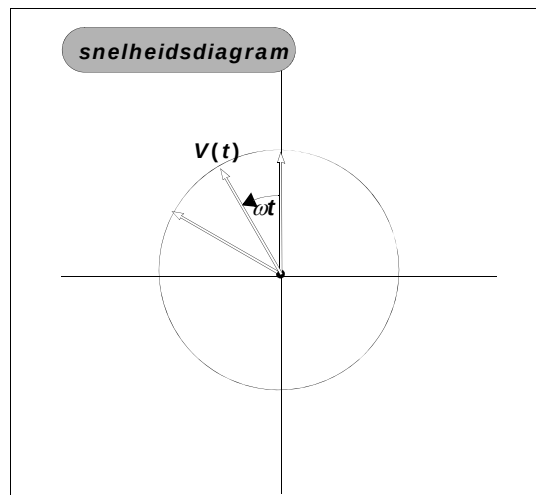
snelheidsdiagram

In dit diagram zie je alleen de drie snelheidsvectoren zelf, verschoven naar één zelfde punt. De snelheidsvector heeft constante lengte (die van de vorige opgave) en draait ook met constante hoeksnelheid ω .

Opgave 2.25 Formule voor de snelheid

- a. Wat is het faseverschil van de snelheidsvector t.o.v de beweging van P zelf?
- b. Stel nu de formules op voor de x - en de y - component van de snelheidpijl.

Maak gebruik van de *lengte* van vector V die je in opgave 2.24 hebt bepaald, en van het *faseverschil* met P :



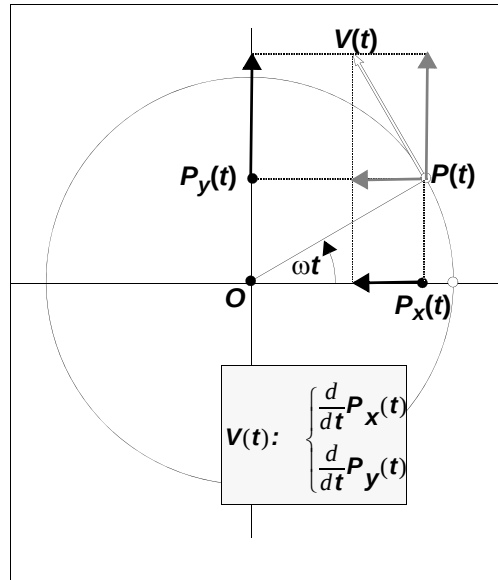
$$V(t): \begin{cases} V_x(t) = \dots \cdot \cos(\dots) \\ V_y(t) = \dots \cdot \sin(\dots) \end{cases}$$

Opgave 2.26 In de figuur hiernaast zie je uitgebeeld:

De horizontale en verticale componenten van de ware snelheid van P zijn juist de snelheden van de horizontale en verticale componenten van P

- a. Lees deze zin langzaam een paar keer door, waarbij je steeds de pijlen en de componenten opzoekt die bedoeld worden.
- b. Vandaar, met behulp van de formules van de vorige opgaven:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(R \cdot \cos(\omega t)) = \dots\dots\dots \\ \frac{d}{dt}(R \cdot \sin(\omega t)) = \dots\dots\dots \end{cases}$$



Opgave 2.27 Schrijf nu de afleiding / beredenering op voor:

$$\frac{d}{dt}((R \cdot \cos(\omega t))) = -\omega \cdot R \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{d}{dt}((R \cdot \sin(\omega t))) = \omega \cdot R \cdot \cos(\omega t)$$

Voor alle volledigheid staat hier ook maar het speciale geval $\omega = 1$.

$$\frac{d}{dt}\cos(t) = -\sin(t)$$

$$\frac{d}{dt}\sin(t) = \cos(t)$$

Opgave 2.28 We hebben de afgeleiden van de functies *sin* en *cos* bepaald zonder differentiëren.

Dat lijkt vreemd.

We hebben wél iets gedaan dat met raaklijnen te maken heeft. In welke opgave gebeurde dat?

2.10 Lengteberekening van vectoren via componenten

De lengte van een vector wordt vaak aangegeven met dezelfde absoluut-strepen als je bij getallen gewend bent. De lengte kun je ook berekenen met behulp van de componenten van de vector en de formule van Pythagoras.

Hier zijn figuur 2-6 en formule 2-8 nogmaals.

Voor de lengte van OQ geldt:

$$|OQ| = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$$

Opgave 2.29 Dat moet de straal R van de cirkel zijn!

Ga ook algebraïsch na dat dit klopt door invullen van de formules.

Opgave 2.30 De amplitude van het somsignaal berekenen

In deze figuur zijn twee signalen aangegeven met amplituden A en B en faseverschil ϕ . Het zijn dus eigenlijk draaiende vectoren.

Op het getekende moment ligt het ene signaal juist langs de horizontale as.

a. Teken in de figuur het somsignaal via de parallellogramconstructie.

Dat somsignaal heeft amplitude C en fase ψ ten opzichte van het A -signaal.

b. Voeg de letters aan de tekening toe.

We gaan nu C en ψ ook berekenen vanuit A , B en ϕ .

c. Leid door een berekening bij de tekening deze formules af:

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\phi} \quad \sin\psi = \frac{B\sin\phi}{C} \quad \tan\psi = \frac{B\sin\phi}{A + B\cos\phi} \quad \text{formule 2-15}$$

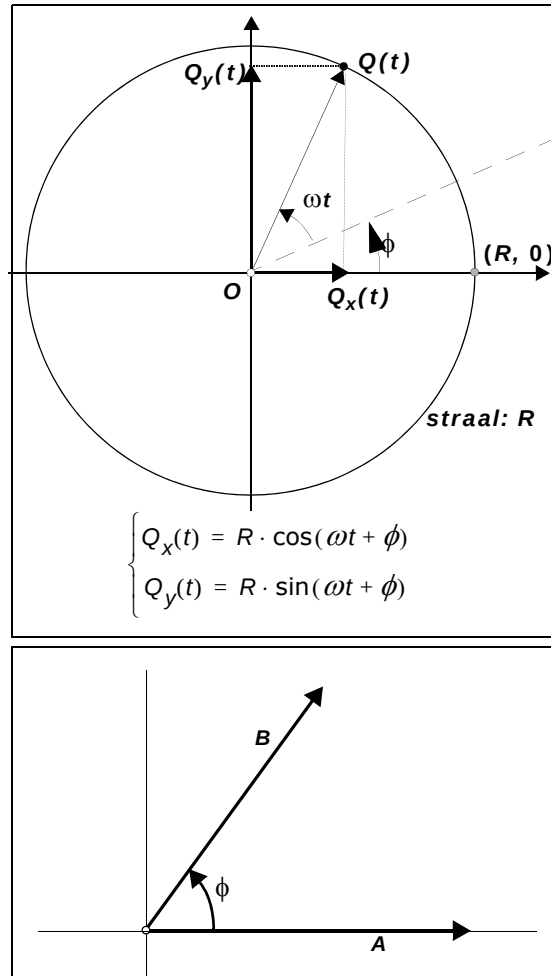
d. Denk nu aan vaste waarden voor A en B . C hangt nog van ϕ af. –

Voor welke waarde van ϕ is C op zijn kleinst? Druk die kleinste waarde in A en B uit.

Opgave 2.31 Een bijzonder geval

Als twee signalen gelijke amplitude hebben en precies π in fase verschillen, is de som van de signalen 0.

Laat met behulp van het voorgaande zien dat dit de enige mogelijkheid is om een som van twee signalen te krijgen die 0 is.



2.11 Samenvatting: onze vraag is beantwoord

Sinusoiden optellen

Twee signalen met dezelfde hoekfrequentie ω , $A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1)$ en $A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2)$, hebben we opgevat als de verticale componenten van draaiingen met hoeksnelheid ω van punten Q_1 en Q_2 ; dan kunnen we deze draaiingen optellen als bewegende vectoren (vanuit O) volgens de parallellogram-regel.

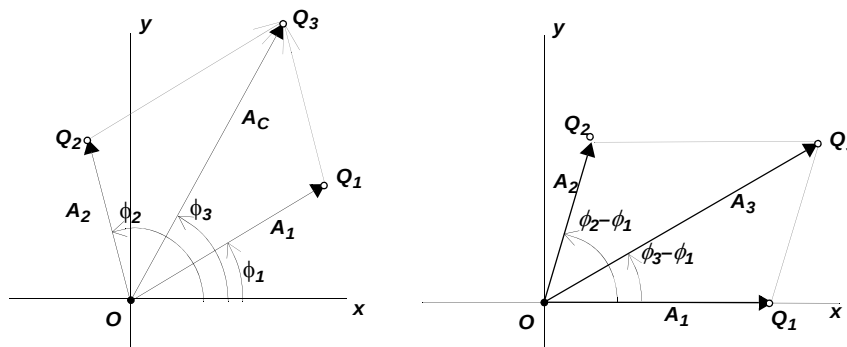
De somvector was een nieuw draaiend punt Q_3 , met dezelfde hoeksnelheid ω , maar met een nieuwe amplitude A_3 en nieuwe fase ϕ_3 . In componenten uitgeschreven:

$$\begin{cases} A_1 \cdot \cos(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega t + \phi_2) = A_3 \cdot \cos(\omega t + \phi_3) \\ A_1 \cdot \sin(\omega t + \phi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \phi_2) = A_3 \cdot \sin(\omega t + \phi_3) \end{cases} \quad \text{formule 2-16}$$

Kijken we slechts naar één component (bijvoorbeeld van y), dan zien we:

de som van twee sinusvormige signalen met dezelfde hoekfrequentie is weer een sinusvormig signaal met dezelfde hoekfrequentie

Om de waarden van A_3 en ϕ_3 te vinden, kan de situatie op tijdstip 0 gebruikt worden; soms is het handiger het tijdstip te kiezen waarop één vector op de x -as ligt



In elke situatie kunnen nu A_3 en ϕ_3 berekend worden. Er geldt:

$$\begin{aligned} A_3 &= \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)} \\ \sin(\phi_3 - \phi_1) &= \frac{A_2 \sin(\phi_2 - \phi_1)}{A_3} \end{aligned} \quad \text{formule 2-17}$$

Afgeleiden van sinussignalen

Door het sinusvormig signaal $R \cdot \sin(\omega t + \phi)$ op te vatten als de verticale component van een draaibeweging van een punt Q konden we ook de afgeleiden van de sin- en de cos-functies vinden:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(R \cdot \cos(\omega t + \phi)) = R\omega \cdot \cos(\omega t + \phi + \pi/2) = -R\omega \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ \frac{d}{dt}(R \cdot \sin(\omega t + \phi)) = R\omega \cdot \sin(\omega t + \phi + \pi/2) = R\omega \cdot \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad \text{formule 2-18}$$

De vragen aan het begin van dit hoofdstuk

De figuren en formules op deze bladzijde geven een bewezen werkende methode om sinussignalen met verschillende amplitude en fase, maar met gelijke frequentie, op te tellen. Dat was het doel dat we wilden bereiken.

2.12 Extra oefeningen

Opgave 2.32 Twee signalen met gelijke hoekfrequentie

Bij deze voorbeelden zijn de amplituden A_1 en A_2 , de hoekfrequentie ω en het faseverschil ϕ gegeven. Signaal $Q_1(t)$ is beschreven met een formule $Q_1(t) = A_1 \cdot \sin(\omega t)$.

Bepaal steeds (op de manier die je het handigst lijkt):

- de formules voor Q_2
- de formule voor het somsignaal Q_3
- de formule voor de afgeleide (noem die V_3) van het somsignaal.

a. $A_1 = 30, A_2 = 40, \omega = 100\pi, \phi = \pi/2$

b. $A_1 = 10, A_2 = 10\sqrt{2}, \omega = 2\pi, \phi = \pi/4$.

c. $A_1 = A_2 = 5, \omega = 100\pi, \phi = 2\pi/3$.

Opgave 2.33 Andere voorstelling van de verschoven sinus

In dit hoofdstuk wordt voor sinusoiden met de voorstelling $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ gewerkt. Het is goed mogelijk dat je eerder de vorm $A \cdot \sin(\omega(t + a))$ bent tegengekomen.

Bij $A \cdot \sin(\omega t + \phi)$ is er sprake van een verandering van een *hoek* van ϕ radialen tenopzichte van de sinusoid $A \cdot \sin(\omega t)$. Bij $A \cdot \sin(\omega(t + a))$ is er een verschuiving over a in de *tijd*.

Neem eens het voorbeeld met $\phi = \frac{\pi}{2}$, dus $A \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Werk dat om naar de vorm $A \cdot \sin(\omega(t + a))$ en laat zien dat in dat geval $a = \frac{T}{4}$.

Geef een korte verklaring hiervan in woorden.

Opgave 2.34 Kan het somsignaal even groot zijn als de signalen zelf?

Ja, dat bleek bij het laatste voorbeeld van de vorige opgave.

Toon aan dat de amplitude van de som van twee signalen met gelijke hoekfrequentie en gelijke amplitudes alleen bij faseverschil $\pm 2\pi/3$ gelijk aan die gezamenlijke amplitude is. Gebruik daarbij de je kennis van meetkunde en de voorstelling op de cirkel.

Opgave 2.35 De versnelling van een draaiend punt

Als $P(t)$ een draaiend punt is zoals in de figuur op bladzijde 34, dan kan de snelheidsvector P' vanuit P als volgt gevonden worden:

- vermenigvuldigen met ω
- $\pi/2$ in fase voor laten lopen.

De afgeleide van de snelheid is de *versnelling*; laten we die aangeven met P'' . Op dezelfde manier kan P'' uit P' worden afgeleid. Laat zien dat $P'' = -\omega^2 P$.

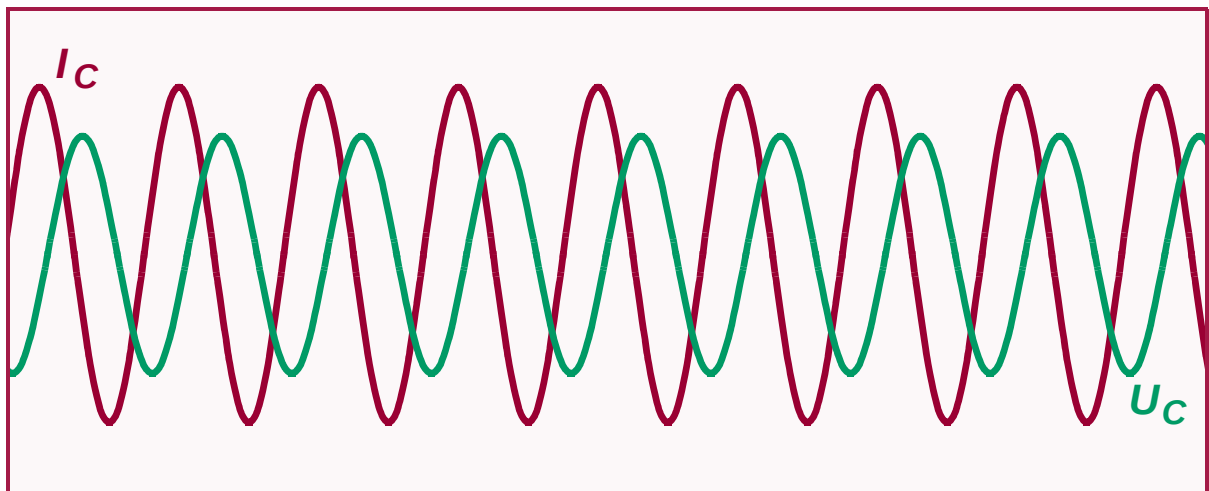
Vooruitblik

P'' en P verschillen slechts een factor $-\omega^2$; een mooi en betrekkelijk simpel verband.

Raar dat zoiets moois niet bestaat voor de snelheid, de eerste afgeleide van P .

In hoofdstuk 4 zal blijken dat ook P' en P *toch ook* slechts een factor verschillen; want daar leren we de draaiing over een rechte hoek óók met een vermenigvuldigfactor beschrijven. Maar die factor is dan wel een getal van een nieuwe soort!

Hoofdstuk 3. Een condensator in een wisselstroomnetwerk



Onderwerpen in dit hoofdstuk

- wisselstroom door een condensator
- het begrip impedantie
- netwerken met weerstand en condensator
- de begrippen versterking en overdracht
- frequentiediagrammen en filters

Inleiding op dit hoofdstuk

In dit hoofdstuk willen we te weten komen hoe een condensator zich gedraagt als je er een wisselspanning over zet. Het zal blijken dat er dan een stroom door gaat lopen, uiteraard een wisselstroom.

Als eerste zoeken we een antwoord op de vraag:

Wat zouden we kunnen verstaan onder de wisselspanningsweerstand van een condensator en hoe kunnen we met die weerstand rekenen in een netwerk waarin een condensator is opgenomen?

We gaan ook onderzoeken hoe een netwerk zich gedraagt waarin zowel een weerstand als een condensator is opgenomen.

Als tweede zoeken we antwoord op de vraag:

Welke functie(s) kunnen wisselstroomnetwerken, waarin een condensator is opgenomen, vervullen?

In een later hoofdstuk zullen we deze vragen ook beantwoorden voor netwerken waarin een spoel is opgenomen, en zelfs voor netwerken met een combinatie van weerstanden, spoelen en condensatoren.

3.1 Wisselstroom en –spanning en de condensator

In deze paragraaf krijg je een eerste antwoord op de eerste vraag aan het begin van dit hoofdstuk. In een volgend hoofdstuk vinden we een beter antwoord op de vraag.

Opgave 3.1 Condensator en spoel in een gelijkstroomnetwerk

In deze opgave ga je na of het zin kan hebben een condensator of een spoel in een gelijkstroomnetwerk op te nemen. Beantwoord daartoe de volgende vragen.

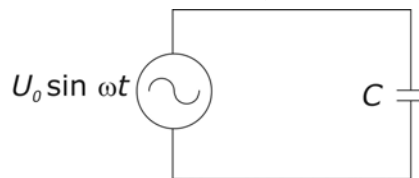
- Hoe groot is de ohmse (gelijkstroom)weerstand van een condensator (als de stroom al enige tijd aanstaat)? Waarom?
- Hoe groot is de gelijkstroomweerstand van een ideale spoel (als de stroom al enige tijd aanstaat)? Waarom?
- Waarom moet bij die twee vragen erbij gezegd worden 'als de stroom al enige tijd aanstaat'?
- Waardoor wordt de ohmse weerstand van een niet-ideale spoel bepaald?
- Bereken de ohmse weerstand van een spoel waarop 30 m koperdraad (doorsnede 0,2 mm²) is gewikkeld.
- Wat is je conclusie: heeft het zin een condensator of een spoel in een gelijkstroomnetwerk op te nemen? Waarom wel/niet?

Condensatoren (en spoelen, maar daarover meer in een later hoofdstuk) zul je niet tegenkomen in gelijkstroomnetwerken. Maar in wisselstroomnetwerken des te meer. Laten we proberen te verklaren waarom dat zo is.

Het verband tussen de stroom door een condensator en de spanning erover wordt gegeven door de vergelijking in formule 1-4:

$$I_c = C \cdot \frac{dU_c}{dt} \quad \text{formule 3-1}$$

We sluiten een condensator aan op een sinusvormige spanningsbron



figuur 3-1

Als je een sinusvormige spanning over de condensator zet:

$$U_c = U_0 \sin \omega t \quad \text{formule 3-2}$$

zal dus de volgende stroom gaan lopen:

$$I_c = C \cdot \frac{dU_c}{dt} = C \cdot \frac{dU_0 \sin \omega t}{dt} = \omega C \cdot U_0 \cos \omega t = I_0 \cos \omega t \quad \text{formule 3-3}$$

Er gaat dus kennelijk een cosinusvormige stroom lopen!

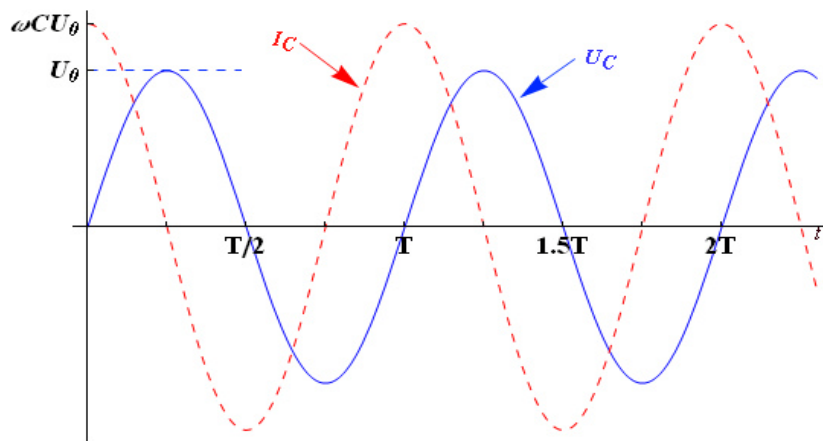
Opgave 3.2 De stroom door een condensator

Leid een formule af voor de amplitude I_0 van de stroom.

Je kunt formule 3-3 ook schrijven als:

$$I_c = I_0 \sin(\omega t + \pi / 2) = \omega C \cdot U_0 \sin(\omega t + \pi / 2) \quad \text{formule 3-4}$$

In onderstaande figuur 3-2 zie je een plaatje van de stroom (streepjeslijn) en de spanning (doorgetrokken lijn).



figuur 3-2

Opgave 3.3 Stroom en spanning uit fase

Bij de beantwoording van deze vraag kun je heel goed hoofdstuk 2.2 van het boek gebruiken!

- Men zegt wel dat bij een condensator de stroom 90° of $\pi/2$ radialen vóór loopt op de spanning. Leg dit uit.
- In opgave a. wordt het faseverschil uitgedrukt als een hoek. Je kunt het ook uitdrukken als een tijdsverschil, meestal als deel van de periode T van de stroom en spanning. Welk deel van T bedraagt het faseverschil hier?
- Je zou ook kunnen volhouden dat de spanning vóórloopt op de stroom. Hoeveel loopt die dan voor?

3.2 Impedantie

Als je in formule 3-4 de maximale grootte (amplitude) van de stroom en die van de spanning vergelijkt, zie je dat geldt:

$$U_0 = \frac{1}{\omega C} I_0 \quad \text{formule 3-5}$$

Je kunt deze vergelijking leggen naast de wet van Ohm voor weerstanden, $U = RI$. Hij heeft dezelfde structuur. De evenredigheidsconstante R in de wet van Ohm, de *weerstand*, is hier vervangen door $1/\omega C$.

Je kunt hieraan zien dat de wisselstroom die door een condensator gaat lopen als je er een wisselspanning over zet, groter zal zijn naarmate de frequentie groter is bij gelijkblijvende U_0 .

Opgave 3.4 De grootte van de stroom door een condensator

- Beredeneer met formule 3-5 dat I_0 groter wordt als de frequentie ω van de wisselspanning groter wordt terwijl U_0 gelijk blijft.
- Wat gebeurt er met I_0 als de frequentie heel laag wordt? En als de frequentie nul wordt (d.w.z. als U een gelijkspanning wordt)?

De grootheid $1/\omega C$ is kennelijk, net zoals de weerstand R voor een gelijkstroom, een maat voor het gemak waarmee een wisselstroom door een condensator kan gaan. Je zou $1/\omega C$ daarom de *wisselstroomweerstand* van een condensator kunnen noemen. Men heeft daarvoor echter de term *impedantie* bedacht. Impedantie en wisselstroomweerstand betekenen hetzelfde. Voor impedantie wordt de letter Z gebruikt. Voor een condensator geldt dus:

$$Z_c = \frac{1}{\omega C} \quad \text{formule 3-6}$$

Je ziet dat de impedantie afhankelijk is van de frequentie.

Opgave 3.5 De impedantie van een condensator

- Laat zien dat de eenheid van Z de ohm (Ω) is.
- Bereken de impedantie van een condensator van 33 nF als de frequentie f gelijk is aan 1 kHz, én als $f = 30$ kHz. Vergeet de eenheid niet!

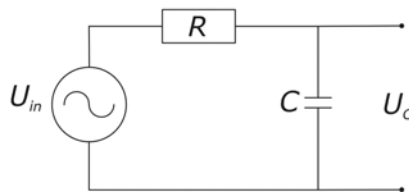
Opgave 3.6 Toch stroom door een condensator?

In de voorafgaande paragraaf zagen we dat het mogelijk is om een wisselstroom door een condensator te laten lopen. Maar een condensator bestaat uit twee geleiders met daartussen een laag isolerend materiaal. En door een isolator kan geen stroom lopen. En inderdaad, er kan geen gelijkstroom door een condensator lopen. Kun je verklaren hoe het toch mogelijk is dat er wel een wisselstroom door een condensator kan lopen? Gaan de elektronen dan toch door de isolatie heen?

3.3 Een simpel netwerk met een condensator

In de volgende paragrafen van dit hoofdstuk gaan we een begin maken met het vinden van een antwoord op de tweede vraag die aan het begin van het hoofdstuk gesteld is. Ook op deze vraag vinden we in een volgend hoofdstuk een uitgebreider en beter antwoord.

We beschouwen de schakeling van figuur 3-3, een zogeheten RC-netwerk:



figuur 3-3

De ingangsspanning U_{in} is een sinusvormige wisselspanning:

$$U_{in}(t) = U_{0,in} \sin \omega t \quad \text{formule 3-7}$$

We willen berekenen hoe groot de spanning over de condensator U_C is, vergeleken met de ingangsspanning U_{in} . We willen dus de *versterking* G van dit netwerk berekenen. We zullen zien dat de versterking frequentieafhankelijk is. We mogen er ook zeker niet van uitgaan dat U_C en U_{in} dezelfde fase hebben! We drukken G daarom uit in de amplituden en niet in de spanningen zelf. Vandaar de volgende notatie:

$$G(\omega) = \frac{U_{0,C}}{U_{0,in}} \quad \text{formule 3-8}$$

Bij het uitrekenen van $G(\omega)$, is het van belang te weten dat de stroomsterkten door R en C gelijk zijn.

Opgave 3.7 Gelijke stromen?

Waarom zijn de stroom door R en de stroom door C aan elkaar gelijk?

Verder weten we dat stroom en spanning door de weerstand samenhangen volgens de wet van Ohm, $U_R = I R$, die bij weerstanden ook geldt voor wisselspanningen. Vanwege die wet weten we ook dat bij een weerstand de stroom en de spanning in fase zijn. Bij de weerstand maakt het niet uit of we de formule noteren met de amplituden of met de spanningen zelf. Dit is ook goed:

$$U_{0,R} = I_{0,C} R \quad \text{formule 3-9}$$

Bij de condensator maakt dat wél uit. Want we weten dat de stroom door de condensator 90° voorloopt op de spanning en dat volgens formule 3-5 het verband tussen de amplituden is:

$$U_{0,C} = I_{0,C} Z_C = \frac{I_{0,C}}{\omega C} \quad \text{formule 3-10}$$

Opgave 3.8 Spanning over weerstand en condensator vergeleken

Maak een tekening waarin je ziet: de spanning over de weerstand als functie van de tijd, de spanning over de condensator als functie van de tijd en de som van deze twee spanningen.

Neem $R = 1 \text{ k}\Omega$ en $C = 100 \text{ nF}$. Maak een tekening voor $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ rad/s}$ en een voor $\omega = 3 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$. Zorg ervoor dat er circa 3 periodes getoond worden. Geef de spanning over de weerstand een amplitude één. Zorg dat de amplitude van de condensatorspanning de juiste relatieve grootte heeft. Je kunt de tekening op papier maken, maar je kunt ook de GR of de computer gebruiken.

Hoe nu verder?

We zijn nu in staat om de som van de spanningen over R en C te tekenen. Die som is zo interessant omdat hij gelijk is aan de ingangsspanning U_{in} ! Dus als we die som kunnen berekenen, kunnen we de vraag beantwoorden wat de versterking is van het RC -netwerk van figuur 3-3.

We hebben intussen een handige methode geleerd om twee sinusvormige spanningen die *niet* in fase zijn op te tellen. In paragraaf 2.7 bleek dat de som van twee sinusvormige signalen weer een sinusvormig signaal is en we hebben gezien hoe je de amplitude en de fase van het somsignaal kunt bepalen met behulp van de parallellogramconstructie. Dat gaan we nu gebruiken.

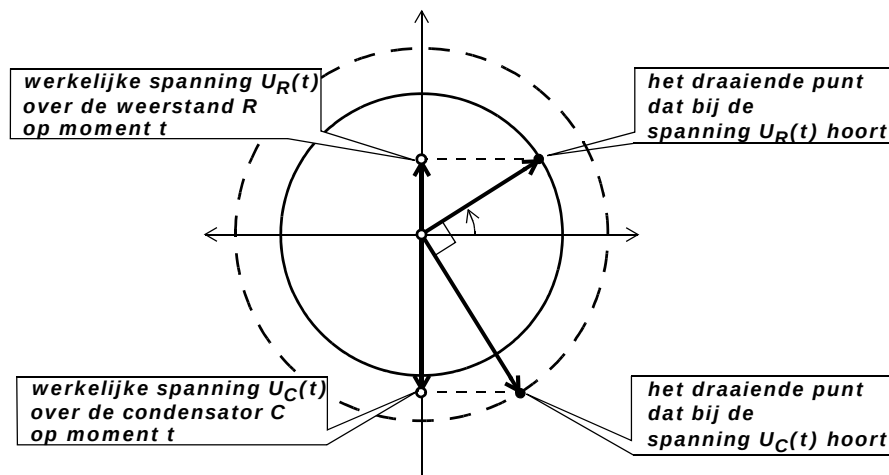
3.4 Versterking in het RC -netwerk**De samenhang van de spanningen**

We weten inmiddels dat het handig is om sinusvormige signalen te beschouwen als de y -component van een draaibeweging. We kunnen dan ook de spanningen en stromen in het RC -netwerk van figuur 3-3 voorstellen door roterende vectoren, waarbij we dan kunnen denken dat de werkelijke spanning de y -component van de draaibeweging is. We zagen eerder dat:

- de stroom door condensator en weerstand steeds dezelfde is,
- de stroom en de spanning bij de weerstand in fase zijn,
- de spanning over de condensator 90° in fase achterloopt op de stroom door de condensator.

De spanning over de condensator ligt daarom óók 90° in fase achter op de spanning over de weerstand.

In onderstaand diagram is dat voor een of ander moment t getekend met twee draaiende vectoren. In deze figuur zie je precies de aansluiting bij de wiskundige aanpak van paragraaf 2.7.



figuur 3-4

Opgave 3.9 Het verband met de figuur in paragraaf 2.7

- De straal van de getrokken cirkel is de amplitude $U_{0,R}$ van de wisselspanning U_R . Waarom?
- Teken in deze figuur op de manier van paragraaf 2.7 ook de ingangsspanning U_{in} : de som van de spanningen U_R en U_C . Eerst als som van vectoren en dan als component op de y -as.
- Teken de cirkel die bij U_{in} hoort en geef de amplitude van de ingangsspanning op de y -as aan.

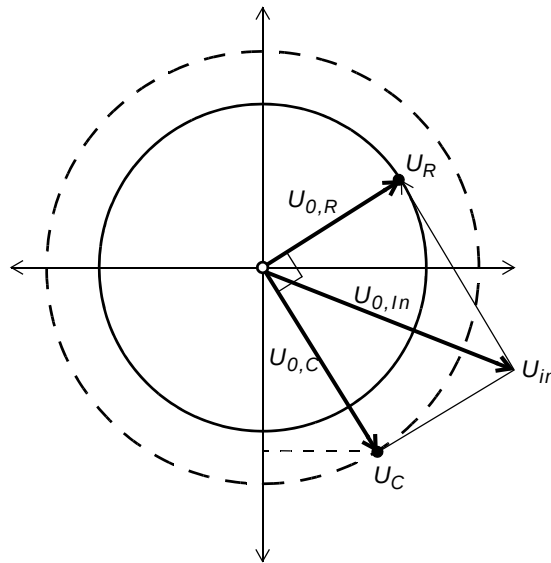
d. Geef bij de drie vectoren de lengtes aan met $U_{0,R}$, $U_{0,C}$ en $U_{0,in}$.

De berekening van de versterking

Voor de berekening van de versterking en het faseverschil hebben we aan de pijlen alleen genoeg. Want daaraan zien we juist de amplituden (dat zijn de lengtes van de pijlen) en ook de onderlinge faseverschillen (dat zijn de hoeken tussen de pijlen). In het vervolg zie je daarom meestal dit eenvoudiger diagram, waarbij de letters voor de spanningen bij de pijlen staan.

Die pijlen zijn dus bedoeld als draaiende pijlen en de waar te nemen spanningen in de schakeling zijn de y-component van de pijlen.

In figuur 3-5 zie je precies wat we nodig hebben voor de berekening.



figuur 3-5

Wegens de stelling van Pythagoras hangen de drie amplituden zo met elkaar samen:

$$U_{0,in} = \sqrt{U_{0,R}^2 + U_{0,C}^2} \quad \text{formule 3-11}$$

Met behulp van formule 3-8 tot en met 3-11 kunnen we nu de versterking berekenen.

Opgave 3.10 Berekening van de overdracht

a. Laat zien dat de versterking gegeven wordt door de volgende formule:

$$G(\omega) = \frac{U_{0,C}}{U_{0,in}} = \frac{1/\omega C}{\sqrt{R^2 + 1/(\omega C)^2}} \quad \text{formule 3-12}$$

b. Laat zien dat je dit ook kunt schrijven als:

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad \text{formule 3-13}$$

3.5 De frequentiekaracteristiek

Wat is de betekenis van de versterking?

Om daar achter te komen, tekenen we de grafiek van G als functie van ω .

Merk eerst op dat de versterking altijd gelijk is aan 1 voor $\omega = 0$, onafhankelijk van de waarden van R en C .

Een ander bijzonder punt van de grafiek kun je vinden voor $\omega = 1/RC$.

Opgave 3.11 Een bijzonder punt

Bereken hoe groot de versterking is voor $\omega = 1/RC$.

Tenslotte kun je ook nog opmerken dat voor $\omega \gg 1/RC$ formule 3-13 benaderd kan worden door:

$$G(\omega) \approx \frac{1}{\omega RC}$$

formule 3-14

Opgave 3.12 $G(\omega)$ voor grote ω

Leid dit af.

Opmerking: ' $\omega \gg 1/RC$ ' betekent dat ω vele malen groter is dan $1/RC$. In je afleiding moet je aantonen dat het quotiënt van de twee formules naar 1 gaat als ωRC een groot getal wordt.

Opgave 3.13 De grafiek van $G(\omega)$

Maak een grafiek van $G(\omega)$ voor $R = 30 \text{ k}$ en $C = 200 \text{ nF}$.

Teken de grafiek tussen $0 < \omega < 3000 \text{ rad/s}$. Gebruik desgewenst de GR of de computer.

Pak dit als volgt aan: Teken eerst drie punten voor $\omega = 0$, $\omega = 1/RC$ en $\omega = 3000 \text{ rad/s}$. Bereken daarna nog enkele puntenparen $(\omega, G(\omega))$ bij strategisch gekozen waarden van ω . Trek tenslotte een vloeiende lijn door de getekende punten. Hoe meer punten je getekend hebt, hoe makkelijker dat is!

De grafiek die je net getekend hebt, heet de *frequentiekaracteristiek* van het RC -netwerk van figuur 3-3. Je kunt er in een oogopslag aan zien hoe de groottes van de uitgangs- en de ingangsspanning zich verhouden. Omdat het gaat over de grootte van de spanningen, d.w.z. de amplitudes, spreekt men ook wel van de *amplitudekaracteristiek*.

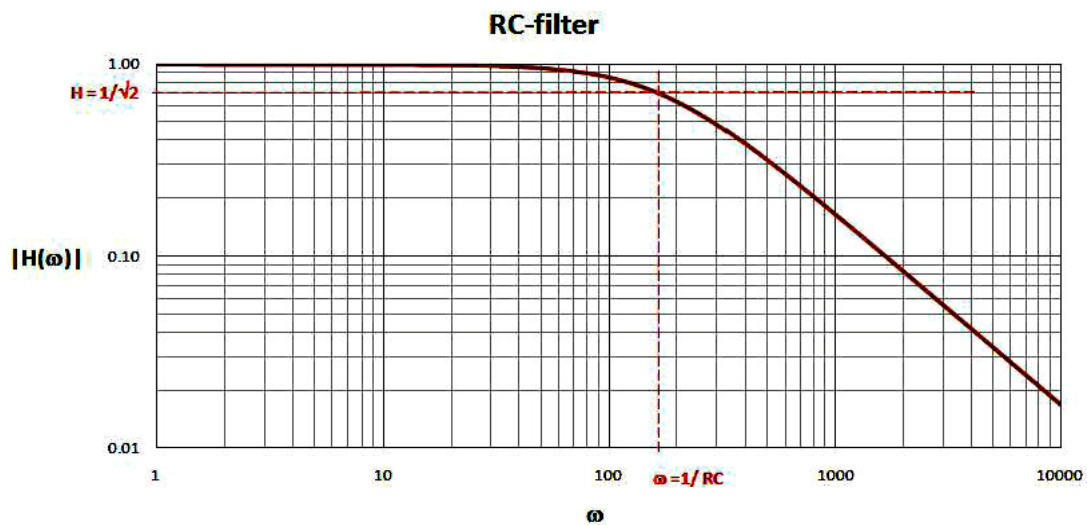
Opgave 3.14 De verhouding van de effectieve spanningen

Hiervoor wordt gezegd dat de versterking de verhouding is van de amplitudes van uit- en ingangsspanning. Zou je ook kunnen zeggen dat de versterking de verhouding is van de effectieve spanningen?

Een dubbellogaritmische grafiek

Meestal wordt een frequentiekaracteristiek niet getekend zoals jij in de vorige paragraaf gedaan hebt, maar met beide assen logaritmisch verdeeld. In onderstaande figuur zie je de amplitudekaracteristiek dubbellogaritmisch getekend¹.

¹ De tekening is gemaakt in Excel. Bij de bestanden die bij dit boek horen, vind je een Excelbestand waarin wordt uitgelegd hoe je zo'n tekening kunt maken.



figuur 3-6

Merk op dat de figuur er nu heel anders uitziet! De horizontale as begint niet bij $\omega = 0$, dat is onmogelijk omdat $\log(0)$ niet bestaat. In figuur 3-6 loopt ω van $\omega = 1 \text{ rad/s}$ tot $\omega = 10^4 \text{ rad/s}$.

Opgave 3.15 Een dubbellogaritmische grafiek

Teken zelf de dubbellogaritmische grafiek op 'dubbellogaritmisch papier' (zie bladzijde 131 en verder, of gebruik Excel). Gebruik de bijzondere kenmerken van de frequentiekaracteristiek zoals die in de vorige paragraaf zijn genoemd. Zet op de horizontale as niet de hoekfrequentie uit maar de 'gewone' frequentie f .

Een laagdoorlaatfilter

Door de frequentiekaracteristiek te bestuderen kun je erachter komen wat het praktische nut is van het RC-netwerk uit figuur 3-3. Als je op de ingang van het netwerk een wisselspanning met een lage frequentie ($\omega \ll 1/RC$) zet, zal deze spanning bijna ongewijzigd doorgegeven worden aan de uitgang. Maar hoe hoger de frequentie wordt, hoe meer verzwakt hij aan de uitgang verschijnt. Met andere woorden, de schakeling laat wel lage frequenties door, maar hoge niet. Vandaar dat deze schakeling de naam *laagdoorlaatfilter* heeft. Dit wordt wel afgekort tot *LDF*. In het Engels heet de schakeling *lowpassfilter*, afgekort tot *LPF*. De hoekfrequentie $\omega = 1/RC$ wordt de *afsnijfrequentie* van zo'n filter genoemd.

Een toepassing

Muziek bestaat uit een 'mengsel' van tonen van allerlei frequenties.

Opgave 3.16 Frequenties in muziek

Wat is de laagste frequentie die in muziek voorkomt en wat de hoogste?

Door in een geluidsversterker het muzieksignaal op de ingang van een *LDF* te zetten kun je de hoeveelheid hoge tonen in de muziek desgewenst verkleinen. Door de weerstand R in het filter regelbaar te maken kun je instellen vanaf welke frequentie je de hoge tonen weg wilt filteren.

Opgave 3.17 Weg met de hoge tonen

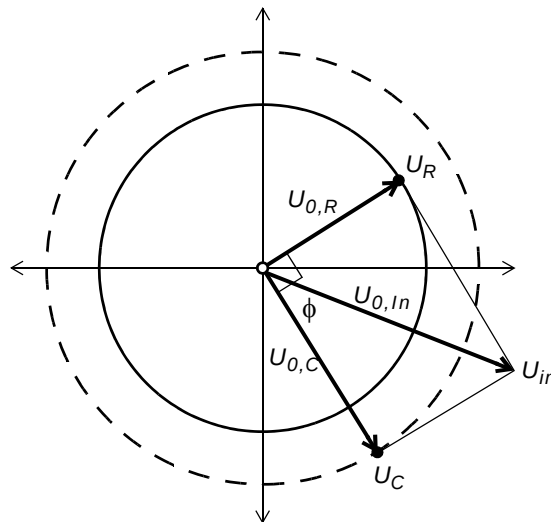
- Ontwerp een LDF waarmee je tonen boven 6 kHz kunt verzwakken.
- Heeft je geluidsversterker thuis een knop waarmee je een LDF bedient?

3.6 De fase van U_{in} en U_{uit}

Misschien denk je nu wel dat we op een slimme manier alle eigenschappen van het RC -netwerk hebben achterhaald, en dat dus de eerste hoofdstukvraag beantwoord is.

Maar we zijn nog één ding vergeten. We weten weliswaar voor iedere frequentie ω hoe de amplitudes van in- en uitgangsspanning zich verhouden, maar toen je een tekening gemaakt hebt van de in- en uitgangsspanning en de spanning over de weerstand heb je gezien dat deze spanningen een faseverschil hebben! En we weten pas alles van ons netwerk als we ook kunnen voorspellen hoe groot het faseverschil tussen in- en uitgangsspanning is bij iedere frequentie ω . Het is vaak belangrijk om dat faseverschil te weten, bijvoorbeeld als je het signaal aan de uitgang wilt gaan optellen bij een ander wisselspanningssignaal.

Het is mogelijk om dat ook af te lezen uit figuur 3-6. Die is hier nogmaals afgedrukt als figuur 3-7.



figuur 3-7

We weten al dat het faseverschil tussen U_R en U_C gelijk is aan 90° en in figuur 3-7 kun je dat zien omdat de pijlen die deze spanningen moeten voorstellen loodrecht op elkaar staan. In de figuur zie je ook dat in- en uitgangsspanning een hoek ϕ met elkaar maken. Die hoek is gelijk aan het faseverschil!

Opgave 3.18 Faseverschil tussen in- en uitgangsspanning

- a. Laat zien dat voor fasehoek ϕ geldt:

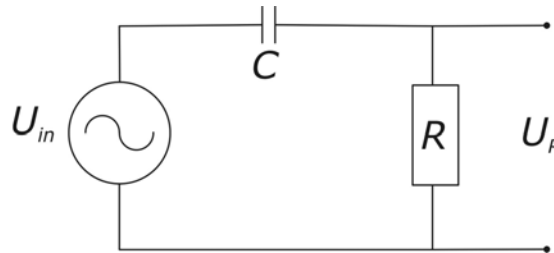
$$\tan \phi = \frac{U_{0,R}}{U_{0,C}} = \omega RC \quad \text{formule 3-15}$$

- b. Maak een grafiek waarin horizontaal de hoekfrequentie uitstaat en verticaal de fasehoek ϕ (in graden of radialen, kies zelf maar).
 c. Wat is het faseverschil in het geval van de bijzondere waarde voor ω van opgave 3.11?
 d. Laat met behulp van figuur 3-7 zien dat voor deze RC -kring geldt:

$$G(\omega) = \cos \phi \quad \text{formule 3-16}$$

Een ander RC-netwerk

Het netwerk van figuur 3-3 is niet het enige simpele netwerk dat je met een weerstand en een condensator kunt bouwen. In de volgende figuur zie je een ander netwerk dat er erg op lijkt.



figuur 3-8

Opgave 3.19 Een tweede RC-netwerk

- Bereken de versterking van dit netwerk.
- Teken de amplitudekarakteristiek van het netwerk, liefst dubbellogaritmisch.
- Onderzoek hoe het faseverschil U_R en U_{in} berekend kan worden. Geef ook een verband tussen versterking en faseverschil, op de manier van opgave 3.18d.
- Hoe denk je dat dit netwerk genoemd wordt? Noem een praktische toepassing.

Terugblik op de notaties

In dit hoofdstuk hebben we bij de berekening van de versterking en het faseverschil (in paragraaf 3.4 en 3.6) nauwkeurig onderscheid gemaakt tussen amplitude van een spanning en de spanning zelf, bijvoorbeeld door de notaties $U_{0,R}$ en $U_R(t)$. Daardoor konden we goed aansluiten bij de wiskunde van hoofdstuk 2.

Toch heb je ook in dit hoofdstuk gezien dat er vaak alleen U_R genoteerd is zonder (t) terwijl er echt wel afhankelijkheid van de tijd is. Bij natuurkunde is die wat kortere notatie heel gebruikelijk, omdat uit de context goed blijkt wat er aan de hand is.

Je zult dat soort verschillen tussen wiskundige en natuurkundige stijlen van notatie in dit boek nog wel vaker zien.

Opgave 3.20 Notatie voor de amplituden kritisch bekeken

We hebben de gebruikelijke notaties $U_{0,R}$, $U_{0,C}$ en $U_{0,in}$ gebruikt voor de amplituden; met een '0' in de onderindex. Het is niet zo dat deze drie de werkelijke grootte van U_R , U_C en U_{in} op moment $t = 0$ aangeven.

- Waarom niet?
- Is er ergens in dit hoofdstuk wel een plek waar het moment $t = 0$ een bijzondere rol speelt?

3.7 Versterking? Overdracht!

We hebben de versterking G gedefinieerd als de verhouding van de grootte (amplitude) van de uit- en ingangsspanning. We hebben ook gezien dat er nog een andere belangrijke verandering optreedt, namelijk de faseverschuiving. Het zou mooi zijn als we in één formule niet alleen de versterking, maar ook de faseverandering zouden kunnen opschrijven.

Dat zou op de volgende manier kunnen gebeuren. In onderstaand netwerk is de ingangsspanning een sinusvormig signaal met frequentie ω , amplitude A_{in} en fase ϕ_{in} , en de uitgangsspanning is een sinusvormig signaal met dezelfde frequentie ω , maar een andere amplitude A_{uit} en fase ϕ_{uit} .



figuur 3-9

De versterking G van dit netwerk is per definitie:

$$G(\omega) = \frac{U_{0,uit}}{U_{0,in}}$$

formule 3-17

We proberen nu een nieuwe grootheid te definiëren, de *overdracht* H (die ook een functie is van ω), en wel als volgt:

$$H(\omega) = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{U_{0,uit} \sin(\omega t + \phi_{uit})}{U_{0,in} \sin(\omega t + \phi_{in})}$$

formule 3-18

Als het netwerk alleen bestaat uit weerstanden is er geen faseverschuiving, $\phi_{uit} = \phi_{in}$, dus dan geldt

$$H(\omega) = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{U_{0,uit} \sin(\omega t + \phi_{in})}{U_{0,in} \sin(\omega t + \phi_{in})} = \frac{U_{0,uit}}{U_{0,in}} = G(\omega)$$

formule 3-19

Voor weerstandsnetwerken is de overdracht dus hetzelfde als de versterking.

Maar bij de RC -kring is het ingewikkelder. H is dan niet constant in de tijd en erger nog, op sommige momenten deel je in formule 3-19 door nul! We kunnen dus formule 3-18 niet zonder meer gebruiken.

Toch blijft de waarde van de versterking $G(\omega) = \frac{U_{0,uit}}{U_{0,in}}$ evident van belang! Maar je zou, om de werking van het netwerk helemaal vast te leggen, in de formule voor de overdracht $H(\omega)$ ook het faseverschil $\phi = \phi_{uit} - \phi_{in}$ willen opnemen. En nu lopen we vast, want het is niet mogelijk formule 3-18 zó te herschrijven dat daarin niet meer de fasen van uit- en ingangsspanning voorkomen, maar alleen het faseverschil ϕ .

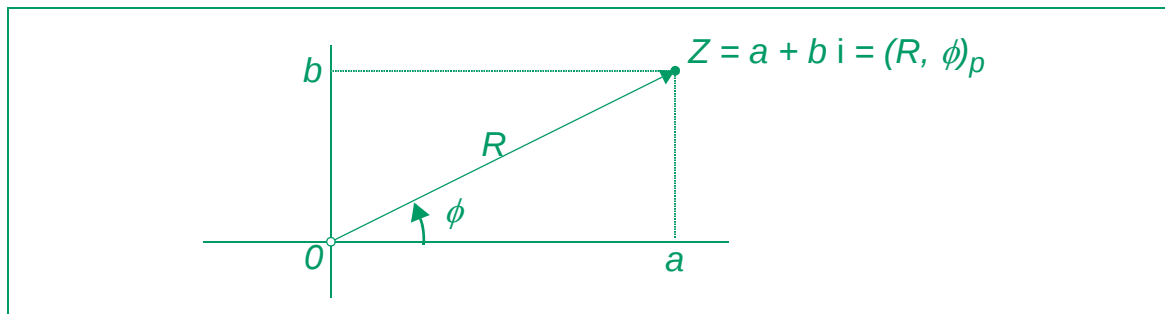
We definiëren daarom de overdracht van een netwerk voorlopig anders:

De overdracht van een netwerk is gedefinieerd als het getallenpaar (G, f) .

Het is nu aan de wiskunde om te zorgen dat we hier net zo handig mee kunnen rekenen, als was het één getal. Ook willen we formule 3-18 op een of andere manier redden uit de valstrik die de *sinusfunctie* daarin voor ons heeft gezet.

Daarvoor zal het nodig blijken een geheel nieuw soort getallen te definiëren, de *complexe getallen*.

Hoofdstuk 4. Constructie van de complexe getallen



Onderwerpen in dit hoofdstuk

In dit hoofdstuk worden de complexe getallen opgebouwd. De belangrijkste onderdelen zijn:

- de overdracht van een schakeling is een complex getal
- complexe getallen vormen samen een vlak
- de polaire en de cartesische voorstelling van complexe getallen
- het bijzondere getal i
- rekenen met complexe getallen en hun absolute waarde, argument, geconjugeerde, reële en imaginaire deel
- de complexe e-macht

Inleiding op dit hoofdstuk en vraagstelling

Aan het eind van het vorige hoofdstuk werd de vraag gesteld of we met samengesteld dingen als het getallenpaar (G, ϕ) misschien net zo makkelijk zouden kunnen rekenen als met de getallen die we gewend zijn.

In dit hoofdstuk bouwen met deze koppels als nieuwe objecten een nieuw getallensysteem op dat inderdaad heel geschikt is om aan elektrische netwerken te rekenen, maar ook andere wiskundige mogelijkheden heeft.

Het basisidee is gauw verteld. Je kent de getallenlijn; daarop kun je de positieve getallen voorstellen als pijlen vanuit nul naar rechts en de negatieve als pijlen naar links. We breiden dit nu uit naar pijlen in alle richtingen in een vlak, dus niet alleen op de getallenlijn. Gezien de structuur met grootte G , de versterkingsfactor, en richting ϕ , de fase verschuiving, ligt die aanpak voor de hand.

De kunst is goede rekenregels voor dit systeem te construeren en deze handig te gebruiken. Dat is het hoofdthema van dit hoofdstuk: rekenen met deze nieuwgebouwde complexe getallen.

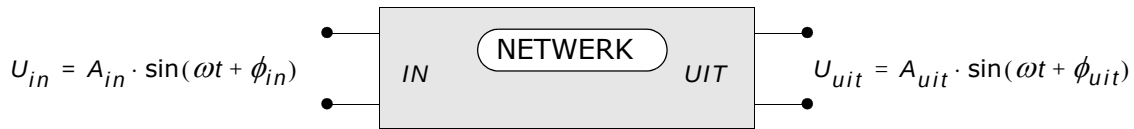
Eigenlijk blij je bij het rekenen aan schakelen en sinussignalen die regels al gebruikt te hebben!

Hoogtepunt is de onverwachte samenhang die we gaan vinden tussen sinus, cosinus en ... de *e-macht*; in het volgende hoofdstuk maken we daar intensief gebruik van bij rekenen aan schakelingen met weerstanden, condensatoren en spoelen.

4.1 De overdracht is een getal met een hoek

Overdracht: het getallenpaar van versterking en faseverschil

Hoofdstuk 3 eindigt met een algemene beschouwing over een netwerk als dit:



Deze (voorlopige) definitie werd voorgesteld:

De **overdracht H** van een netwerk is gedefinieerd als het getallenpaar (G, ϕ) .

De versterking G :

de factor waarmee je de amplitude A_{in} van de ingangsspanning moet vermenigvuldigen, om de amplitude A_{uit} van de uitgangsspanning te vinden.

Het faseverschil ϕ :

het getal dat je bij de fase ϕ_{in} van de ingangsspanning moet optellen, om de fase ϕ_{uit} van de uitgangsspanning te vinden.

In formules:

$$G = \frac{A_{uit}}{A_{in}} \quad \phi = \phi_{uit} - \phi_{in} \quad \text{formule 4-1}$$

In deze eerste paragrafen bouwen we aan de hand van dit idee het systeem van de *complexe getallen* op.

Maar eerst doen we enkele oefeningen met het begrip 'overdracht'.

Opgave 4.1 Overdracht en signaalformules

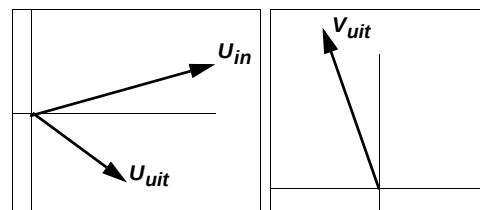
- a. Bij een schakeling geldt: $U_{in} = 30 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{2})$ en $U_{uit} = 20 \sin(100\pi t + \frac{\pi}{4})$.

Wat is de overdracht?

- b. Een andere schakeling heeft ingangsspanning $U_{in} = 12 \sin(1800t + \frac{\pi}{3})$ en als overdracht het getallenpaar $(0.75, -\pi/2)$. Geef een formule voor de uitgangsspanning U_{uit} .

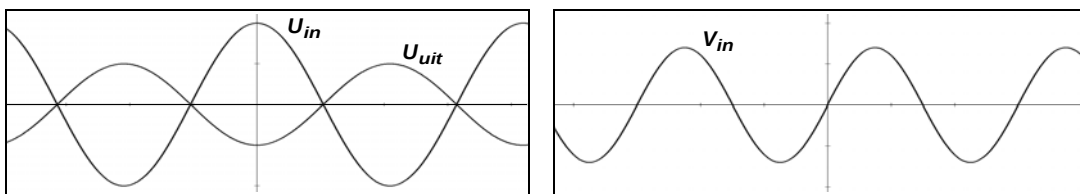
Opgave 4.2 Overdracht en pijlendiagram

- a. In de linkerfiguur zijn in- en uitgangsspanning van een schakeling getekend op een bepaald moment. Bepaal de overdracht H .
- b. In de rechterfiguur is gegeven dat voor de overdracht H van V_{in} naar V_{uit} geldt: $H = (2, \pi/2)$ is. Teken V_{in} .



Opgave 4.3 Overdracht en grafiek

- a. In de linkerfiguur zijn bij een bepaalde frequentie U_{in} en U_{uit} getekend. Bepaal de overdracht.



- b. Teken in de rechterfiguur een extra sinusöide V_{uit} , zodat de overdracht $(0.5, -2\pi/3)$ is.

4.2 Signalen (of overdrachten) samenstellen

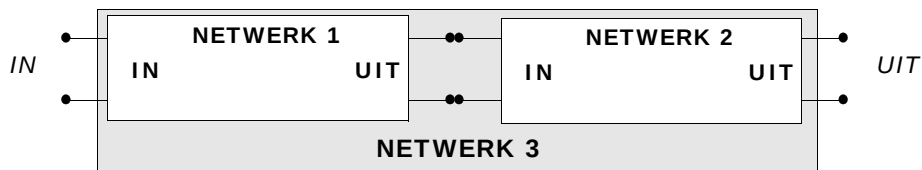
In deze paragraaf verschuiven we de aandacht van de in- en uitsignalen van de schakeling naar de overdracht. Want met die overdracht willen we handig kunnen *rekenen*.

Denk ter vergelijking eens aan een kopieerapparaat. Als je een figuur eerst 1.5 keer vergroot, en wat uit het apparaat rolt daarna weer 2 keer vergroot, heb je een totale vergrotingsfactor 3, namelijk 1.5×2 .

Overdrachten doen net zo iets. Als we er ook twee na elkaar toepassen, krijgen we een goed idee wat de vermenigvuldiging van twee overdrachten zou moeten zijn.

Opgave 4.4 Twee overdrachten na elkaar

Hier is de uitgangsspanning van netwerk 1 de ingangsspanning van netwerk 2.



figuur 4-1

Netwerk 1 heeft overdracht (G_1, ϕ_1) en netwerk 2 heeft overdracht (G_2, ϕ_2) .

De gezamenlijke schakeling is netwerk 3.

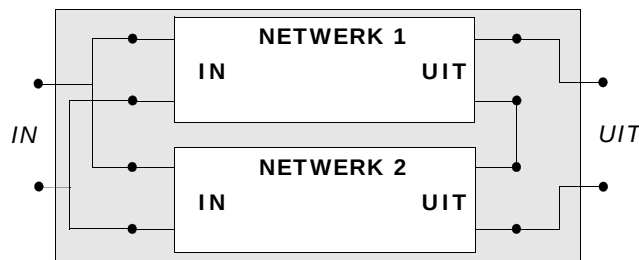
- Wat is de versterking van netwerk 3? En het faseverschil tussen in- en uitgang?
- Wat is de overdracht van netwerk 3?

Bij het na elkaar schakelen van netwerken is de berekening van deze samenstelling niet zo moeilijk.

In ons nieuwe getallensysteem gebruiken we deze samenstelling zo dadelijk als aanleiding voor de nieuw te definiëren vermenigvuldiging. Met een andere samenstelling van schakelingen maken we een beeld voor de optelling.

Opgave 4.5 Twee overdrachten naast elkaar

Hier zijn de ingangsspanningen van netwerk 1 en netwerk 2 hetzelfde. De uitgangsspanningen worden opgeteld.



figuur 4-2

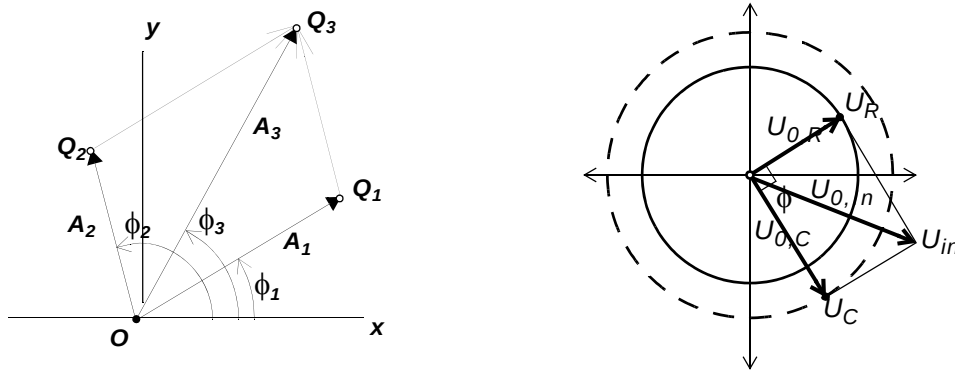
Deze samenstelling van twee signalen is eerder uitvoerig belicht. Waar en hoe?

Opgave 4.6 Hoe werkt het als de faseverschillen gelijk aan 0 zijn?

Stel je voor, we werken met schakelingen met alleen weerstanden. Dan zijn alle faseverschillen 0. Ga na dat het dan inderdaad over gewoon vermenigvuldigen en optellen gaat.

4.3 Overdrachten als punten in het vlak

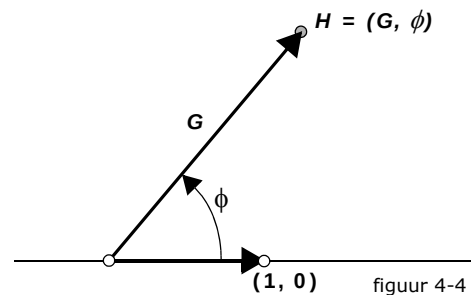
Deze figuren stonden al in hoofdstuk 2 en 3.



figuur 4-3

Bij de eerste figuur ging het om punten die in het vlak om O draaien en wat er dan bij optellen volgens de parallellogramregel gebeurde; bij de tweede stelden de punten wisselspanningen voor; je kunt de amplituden en de fasen daar goed zien. Dit type beelden gaan we nu gebruiken om overdrachten te ordenen en in samenhang te bekijken.

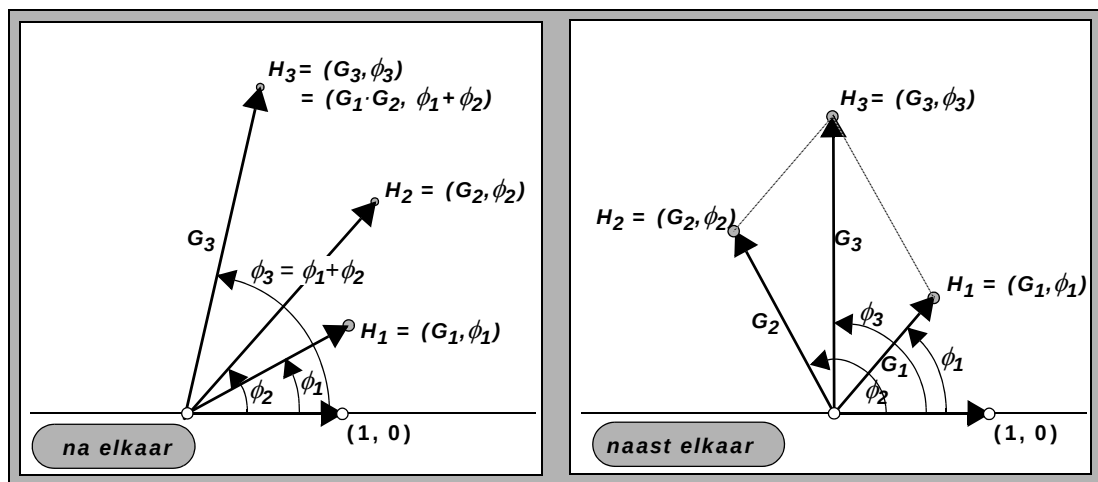
Elke schakeling met een U_{in} en U_{uit} en een gegeven overdracht $H = (G, \phi)$ kun je ook in beeld brengen door de pijl voor U_{in} de lengte 1 en fase 0 te geven. De pijl voor U_{uit} komt in de afbeelding dan precies op het punt $H = (G, \phi)$; waarbij je (G, ϕ) wel moet lezen in poolcoördinaten, dus als grootte en richting van een pijl uit O , zoals in deze figuur aangegeven.



figuur 4-4

Nu kunnen we natuurlijke meer *overdrachten* in deze figuur brengen. In principe is elk punt van het hele vlak nu een mogelijke *overdracht*.

In onderstaande figuur is het samenstellen van overdrachten *na* elkaar en het samenstellen van overdrachten *naast* elkaar afgebeeld, dus passend bij figuur 4-1 en 4-2 en in overeenstemming met wat we al weten van wisselspanningen.



figuur 4-5

4.4 Dat zijn de complexe getallen!

In de vorige paragrafen heb je gezien dat 'overdrachten' zich als vectoren gedragen bij optellen. Je hebt ook gezien dat er nog een andere wijze van samenstellen van overdrachten mogelijk is, die in het geval van faseverschillen 0 juist als de gewone vermenigvuldiging van gewone getallen (versterkingsfactoren!) werkt.

In dit hoofdstuk werken we met de overdrachten op zichzelf, als met een nieuw getsysteem. We vergeten (tijdelijk) de achtergrond van de schakelingen en bestuderen het rekenen in dit systeem op zichzelf.

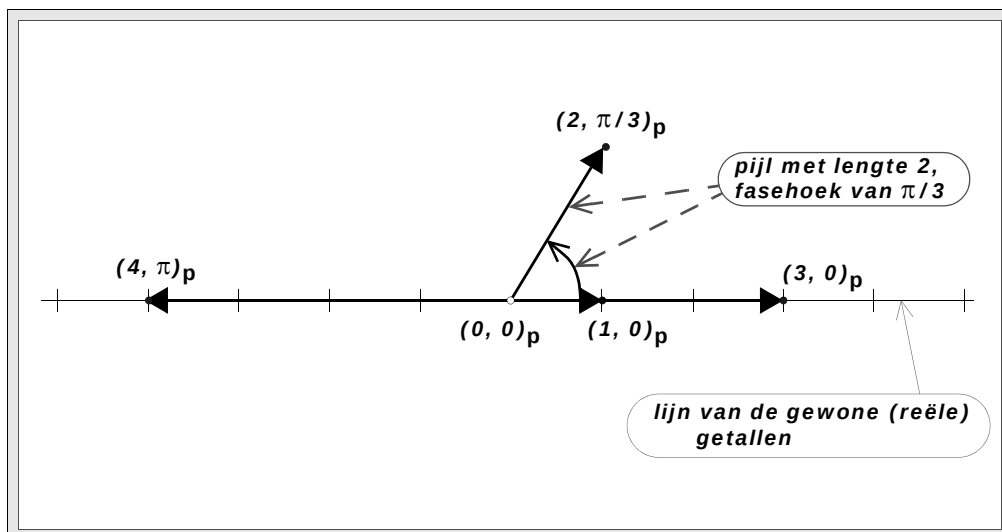
Dit is het systeem van de **complexe getallen**. Je weet er dus eigenlijk al heel wat van:

- Een complex getal kun je voorstellen als een pijl in het vlak vanuit de oorsprong O . De pijl heeft een grootte en een richting; De 0 -richting is de richting van de positieve x -as en de hoeken meten we tegen de klok in draaiend.
- Complexe getallen kun je *optellen*: net als vectoren.
- Complexe getallen kun je *vermenigvuldigen*: de groottes vermenigvuldigen, de richtingshoeken optellen.

Het complexe vlak

De plaatsing in het vlak geeft een sterk meetkundig beeld van dit stelsel gloednieuwe getallen. We noemen dit '*het complexe vlak*'. Voor de gewone getallen (de zogenaamde reële getallen) hebben we ook zo'n beeld: de getallenlijn. Wat de getallenlijn voor de reële getallen is, is *het complexe vlak* voor de complexe getallen.

Hieronder zie je een stuk van het complexe vlak. Enkele complexe getallen zijn op een bepaalde manier aangegeven. Eerst moeten we daar goed in thuis raken! Merk alvast op dat de gewone getallenlijn een onderdeel van het complexe vlak is. Straks gaan we daar meer op in.



figuur 4-6

Notatie-afspraken voor dit hoofdstuk

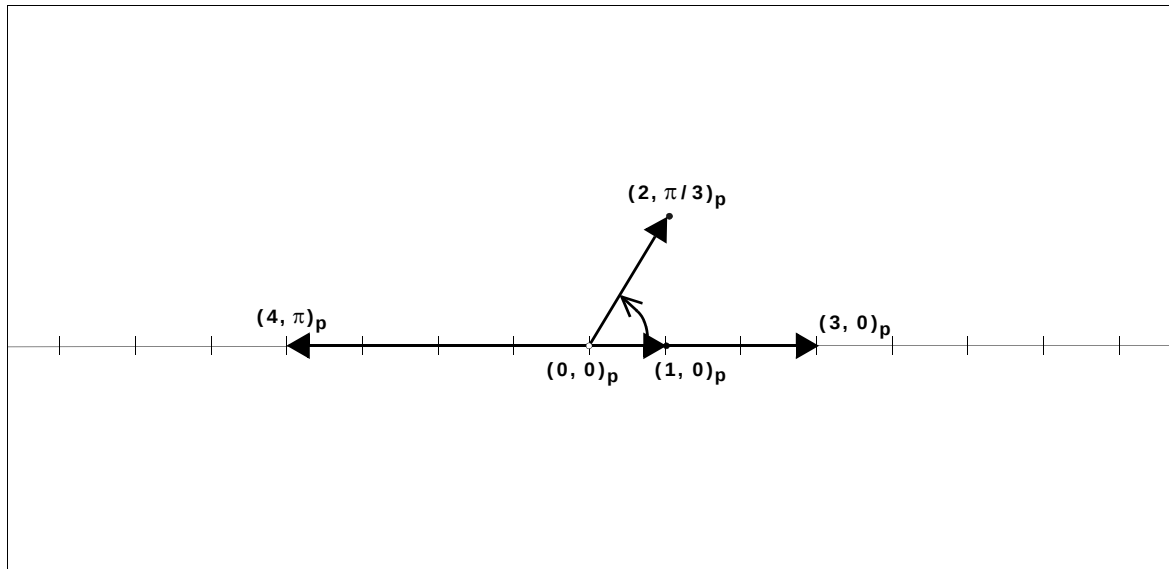
Met een kleine subscript p geven we aan dat het geen gewone coördinaten zijn, maar afstand-met-richtingcoördinaten, officieel *poolcoördinaten* genoemd. Deze **poolnotatie** en het lokaliseren van complexe getallen oefenen we nu. Deze notatie gebruiken we alleen in dit hoofdstuk.

4.5 Navigeren in het complexe vlak

Op de volgende bladzijde is een iets groter stuk van het complexe vlak afgebeeld. De afstanden tussen de streepjes op de as zijn hier 1 cm (maar dat hoeft in plaatjes niet per se).

Opgave 4.7 Markeer de volgende complexe getallen ook in het complexe vlak:

- $K: (1, \pi/2)_p$ $L: (2, 3\pi/4)_p$ $W: (1, 1.5\pi)_p$ $V: (2, -\pi/100)_p$ $Y: (1.5, -\pi/3)_p$.
- Teken de figuur die alle complexe getallen van de vorm $(\dots, \pi/4)_p$ bevat.
- Teken de figuur die alle complexe getallen van de vorm $(3, \dots)_p$ bevat.



figuur 4-7

Opgave 4.8 Afstanden

- Teken nauwkeurig de punten $P(8, -\pi/6)$ en $Q(6, \pi/3)$.
- Meet de afstand PQ . Die moet precies 10 zijn. Waarom?

Opgave 4.9 Een vierkant en een regelmatige gelijkzijdige driehoek

- $ABCD$ is een vierkant om O ; $A = (5, \pi/6)_p$. Wat zijn B , C en D ?
- Schrijf de poolcoördinaten op van de twee punten die met het punt $W: (1, 3/2 \pi)_p$ een gelijkzijdige driehoek met middelpunt O vormen.

Onbeperkt in richting en uitgebreidheid!

Op de gewone getallenlijn bestaan maar twee richtingen vanuit O : die van de positieve en die van de negatieve getallen. Het complexe vlak heeft echter ook getallen in alle andere richtingen van het vlak. Er is ook geen beperking in de 'grootte'. Complexe getallen met heel grote lengte (afstand tot het centrum O) bestaan ook!

4.6 Vermenigvuldigen en delen bij complexe getallen

Vermenigvuldigen van complexe getallen heb je leren kennen via het na elkaar toepassen van overdrachten. Nu volgt een formele definitie, die precies hetzelfde zegt:

Als $Z_1 = (A_1, \phi_1)_p$ en $Z_2 = (A_2, \phi_2)_p$ twee complexe getallen zijn, dan definiëren we het product van Z_1 en Z_2 als $Z_1 \times Z_2 = (A_1 \times A_2, \phi_1 + \phi_2)_p$

De motivatie voor de definitie kwam uit de schakelingenwereld, maar deze definitie is nu een zuiver wiskundige afspraak. De vermenigvuldiging is goed te onderzoeken met poolcoördinaten. Dat doen we daarom ook eerst voor we met de optelling aan de slag gaan.

Opgave 4.10 Vijf oefeningen in vermenigvuldigen van complexe getallen

- a. $(2, \pi/2)_p \cdot (3, \pi/2)_p =$ c. $(1, \pi)_p \cdot (1, \pi)_p =$
 b. $(2, -\pi/3)_p \cdot (0.5, \pi/3)_p =$ d. $(3.31, 0.76)_p \cdot (2.015, 2.34)_p =$
 e. $(2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p \cdot (2, 4\pi/5)_p =$

Opgave 4.11 Negatieve getallen en verder!

In een van de voorbeelden van de vorige opgave staat eigenlijk $(-1) \cdot (-1) = 1$.

- a. Welk voorbeeld?
 b. Bouw zelf een complex getal dat, met zichzelf vermenigvuldigd, -1 ofwel $(1, \pi)_p$ oplevert.

Proficiat! Je hebt zojuist in vraag b het imaginaire getal i gemaakt, de beruchte wortel uit -1 . Vanaf paragraaf 4.10 gebruiken we dat getal intensief.

Opgave 4.12 Over de 2π heen of niet

- a. In opgave 4.10e telden de fasehoeken samen op tot 4π . Dat moet je niet zo laten staan, want je kunt de positie van het getal veel eenvoudiger noteren. Hoe?
 b. De uitkomst is een gewoon reëel getal. Welk?
 c. Formuleer een rekenregel over hoe om te gaan met grote fasehoeken.

Gewone reële getallen zijn óók complexe getallen; de negatieve ook

De gewone reële getallen zijn onderdeel van het complexe vlak. $(1, 0)_p$ is gewoon het getal 1. In figuur 4-6 is dat aangegeven. Toch zit hier een addertje onder het gras.

Want nu kun je twee reële getallen (bijvoorbeeld 2 en 3) op twee verschillende manieren vermenigvuldigen: volgens de oude regel en volgens de nieuwe. Naast elkaar:

oude manier

$$2 \times 3 = 6$$

nieuwe (complexe) manier

$$(2, 0)_p \times (3, 0)_p = (2 \times 3, 0 + 0)_p = (6, 0)_p$$

Dat klopt inderdaad. Want 6 en $(6, 0)_p$ stellen hetzelfde getal voor.

Nu onderzoeken we de negatieve getallen wat nader en in het bijzonder de regel van min-maal-min is plus.

Opgave 4.13 Negatieve getallen op twee manieren vermenigvuldigen

- a. De overdracht $(1, \pi)_p$ gaf aan dat het uitgangssignaal tegengesteld is aan het ingangssignaal. Want π is de hoek van de halve draai. Welke oude bekende op de getallenlijn is dat?
 b. Schrijf ook de getallen -5 , -10 en 1.234 in poolnotatie.

Belangrijke opmerking

Zoiets als $(-5, 0)_p$ is niet acceptabel!

Want -5 is geen afstand. Daar moet echt 5 staan, en je moet dus ook niet 0 als fasehoek nemen, maar π .

- c. Schrijf nu net als hierboven de vermenigvuldiging van -3 en -4 op de *gewone* en op de *complexe* manier uit. Controleer weer of het getal dat bij de nieuwe manier ontstaat echt hetzelfde is als het getal bij de oude manier.

De gewone getallenlijn is dus deel van het complexe vlak en de oude bewerkingen op gewone getallen zijn als het ware uitgebreid naar de nieuwe.

Delen en machtsverheffen

Omdat $3 \cdot 7 = 21$ geldt $21 : 7 = 3$. Anders gezegd: 3 is het antwoord op de vraag: *Waar moet ik 7 mee vermenigvuldigen om 21 te krijgen?* Delen is het omgekeerde van vermenigvuldigen; bij complexe getallen is dat ook zo. Machtsverheffen (voorlopig alleen met gehele exponenten) bestaat ook bij complexe getallen: gewoon herhaald vermenigvuldigen; delen bij negatieve exponenten. De bekende rekenregels gaan door.

Opgave 4.14 Rekenen met $V = (2, \pi/3)_p$ en $W = (0.5, \pi/9)_p$; U is niet nader aangeduid.

- | | | |
|----------------|----------------------|--|
| a. $V \cdot W$ | c. $V^{-1} \cdot W$ | e. $W : V$ |
| b. $V : W$ | d. V^{-2} / W^{-3} | f. $V^{10} \cdot U^{-4} \cdot V^{-10} \cdot U^4$ |

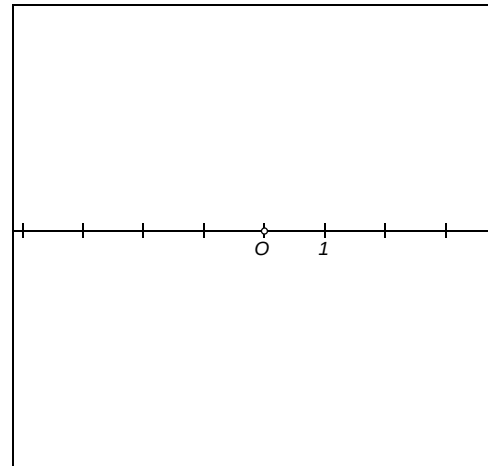
Opgave 4.15 Bedenk:

Een of méér complexe getallen S die voldoen aan de vergelijking $S^5 = (1, \pi)_p = -1$. Teken ze hiernaast.

Deze opgave laat zien dat de complexe getallen een veel rijker systeem vormen dan de reële getallen. Wat je gewend ben is er te vinden, maar er is ook veel nieuws.

Opgave 4.16 Veel, heel veel wortels

- Laat zien dat er 10 complexe getallen T zijn die voldoen aan $T^{10} = 1024$ en teken ze in het complexe vlak.
- Hoeveel oplossingen heeft de vergelijking $Z^{13} = -3$?
- Teken voor $n = 0, 1, 2, \dots, 32$ de punten $((\sqrt[32]{4})^n, n/8 \cdot \pi)_p$ en teken een vloeiende lijn door die punten. Je kunt het ook je grafische rekenmachine gebruiken.

**4.7 Vermenigvuldigen in een figuur**

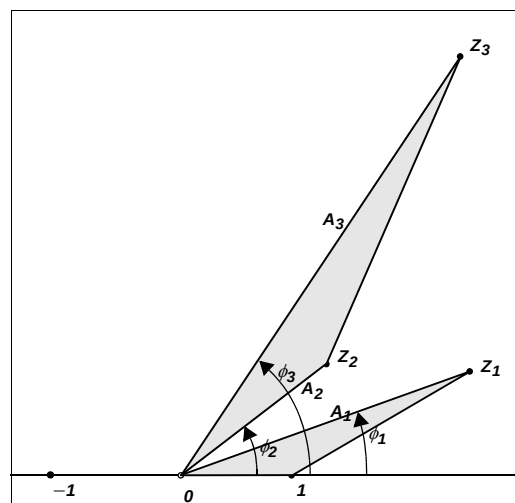
In deze figuur is '1' weer het complexe getal $(1, 0)_p$; en -1 is het complexe getal $(1, \pi)_p$. Dat is heel gebruikelijk en de korte notatie voor reële getallen gebruiken we vaker.

Deze figuur geeft een nieuwe kijk op vermenigvuldigen.

Opgave 4.17 Van gelijkvormigheid naar complex vermenigvuldigen

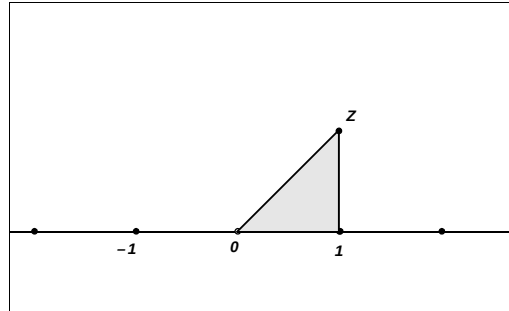
Gegeven de driehoeken $O-1-Z_1$ en $O-Z_2-Z_3$ zijn gelijkvormig.

- Waarom geldt nu $\phi_3 = \phi_1 + \phi_2$?
- Noem de lengtes van de pijlen naar Z_1 , Z_2 en Z_3 even A_1 , A_2 en A_3 . Er is een verband tussen A_1 , A_2 en A_3 . Welk verband?
- Leg uit waarom ' $Z_3 = Z_1 \cdot Z_2$ ' hetzelfde betekent als 'driehoeken $O-1-Z_1$ en $O-Z_2-Z_3$ zijn gelijkvormig'.



Opgave 4.18 Machten van een speciaal complex getal

In de figuur hiernaast is $O-1-Z$ een rechthoekige gelijkbenige driehoek; getekend in het complexe vlak. Z is dus een complex getal, waar je mee kunt rekenen. Je kunt het bijvoorbeeld ook kwadrateren.



- Teken in de figuur Z^2 , Z^3 , Z^4 ; maak daarbij gebruik van driehoeken die met $O-1-Z$ gelijkvormig zijn.
- Welk complex getal is Z^8 ?

Opgave 4.19 Extra: uitdaging voor Cabri- en Geogebra-gebruikers!

- Maak een vrij beweegbaar punt, label het Z . *Construeer nu Z^2 .*
- Verken wat Z^2 doet als Z over cirkels loopt die wel of niet om de oorsprong liggen.

4.8 Absolute waarde, argument, reële as, conjugereren

De reële as

Al een paar keer is ter sprake gekomen dat de gewone getallenlijn deel is van het complexe vlak. Er is een naam voor, die gebruiken we van nu af aan:

de vertrouwde gewone getallenlijn heet de **REËLE AS** van het complexe vlak

In het bijzonder is 0 ook een complex getal. Het heet ook 'de oorsprong' van het complexe vlak.

Absolute waarde en argument

Van het complexe getal $Z = (A, \phi)$ zijn A en ϕ gewone getallen. A bepaalt de grootte, ϕ de richting. De officiële namen vind je hier:

Als $Z = (A, \phi)_p$ een complex getal is, dan heet A de absolute waarde van Z en heet ϕ het argument van Z .
De absolute waarde van Z wordt met gewone absoluut strepen aangegeven: $|Z| = A$.

Opmerking: De getallen met *argument* 0 of $-\pi$ zijn de getallen die je al kent, dat zijn de zogenaamde reële getallen. Ze liggen op de reële as.

Opgave 4.20 De absolute waarde van een complex getal is positief of nul.

- Waarom is dat zo? Welk getal heeft absolute waarde 0?
- Sluit de nieuwe definitie van absolute waarde aan bij de oude?
- Je weet dat voor gewone getallen en de (oude) absolute waarde geldt $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$.
Bijvoorbeeld $|-3| \cdot |5| = |-3 \cdot 5|$.
Leg uit waarom de volgende regel algemeen geldt voor complexe getallen:

$$|Z_1| \cdot |Z_2| = |Z_1 \cdot Z_2|$$

formule 4-2

- Geef de absolute waarden van $(2, \pi/9)_p$ en van $(2, \pi/9)_p \cdot (2, \pi/11)_p \cdot (2, \pi/13)_p \cdot (2, \pi/15)_p$.

Opgave 4.21 Een slechte gewoonte!

Soms wordt de absolute waarde van een (gewoon) getal a beschreven met: 'de wortel van a^2 '. Dat is voor gewone getallen weliswaar waar, maar het is een slechte gewoonte; en bij complexe getallen gaat het niet eens op. Veel beter is de beschrijving 'de afstand van a tot 0'. Klopt de tweede beschrijving voor *alle* complexe getallen, dus ook voor de gewone getallen?

Opgave 4.22 Argumenten gaan van 0 tot aan 2π , hoewel

Omdat het argument van complex getal Z de hoek is die de pijl van O naar Z met de positieve kant van de reële as maakt, tegenkloks gerekend, zit daar wel wat in. Maar

.. even goed kun je de hoeken kiezen met positieve waarden voor boven de reële as en met negatieve voor onder de reële as.

- Op welke interval van mogelijkheden voor het argument kom je met die tweede keus uit?
- Vertaal $(2, 3\pi/2)$ naar de tweede variant.
- Vertaal $(3, -\pi/7)$ naar de eerste variant.
- Is het verkeerd helemaal geen beperking aan het argument op te leggen en tevreden te zijn met het feit dat een complex getal via meerdere 'argumenten' kan worden 'aangesproken'?

Opgave 4.23 De eenheidscirkel

Onder de gewone getallen op de reële as zijn er maar twee die absolute waarde 1 hebben: 1 en -1 .

- Wat is de figuur die bestaat uit *alle* complexe getallen, die absolute waarde gelijk 1 hebben?
- Als je twee getallen van die verzameling vermenigvuldigt, kom je wéér op die figuur uit. Waarom is dat zo?

Deze verzameling heet om voor de hand liggende redenen de 'eenheidscirkel' van het complexe vlak. Vermoedelijk ken je de term al, ook bij het gewone coördinatenvlak met x - en y -as wordt de term gebruikt.

Vanwege de eigenschap bij **b** zeggen we: *de eenheidscirkel is gesloten onder vermenigvuldiging*.

- Leg uit waarom de reële as ook gesloten is onder vermenigvuldiging.

de geconjugeerde van een complexe getal

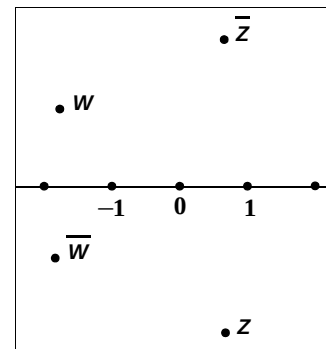
Elk getal Z in het complexe vlak heeft een spiegelbeeld in de reële as.

Dat is de zogenaamde (*complex*) *geconjugeerde* van Z .

De geconjugeerde van Z wordt genoteerd met een streep boven het getal: $\bar{Z}$.

(Natuurkundigen noteren vaak (maar niet in dit boek) Z^* .)

In de figuur zijn van Z en W de geconjugeerden aangegeven.

**Opgave 4.24 Belangrijke eigenschappen van geconjugeerden**

- Voeg in figuur de lijnen OZ en $O\bar{Z}$ toe en leg uit waarom:
 - de absolute waarden van Z en $\bar{Z}$ aan elkaar gelijk zijn
 - de argumenten van Z en $\bar{Z}$ elkaars tegengestelden zijn
- Als $Z = (A, \phi)_p$, wat zijn dan de poolcoördinaten van $\bar{Z}$?
- Toon aan dat voor elk complex getal Z geldt: $Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2$.

Het bewijs begint bijvoorbeeld zo: Schrijf Z als $(A, \phi)_p$.

Dan volgt $Z \cdot \bar{Z} = (A, \phi)_p \cdot (\dots, \dots)_p = (\dots, \dots)_p = \dots$

- In deze formule zijn U en V complexe getallen: $\overline{U \cdot V} = \bar{U} \cdot \bar{V}$:

Hierr staat: *de geconjugeerde van $U \cdot V$ is gelijk aan (de geconjugeerde van U) $\cdot$ (de geconjugeerde van V).*

Toon dit aan op de manier van de vorige vraag.

- Vertaal in woorden en leg uit waarom geldt: $\overline{\bar{Z}} = Z$.

Samenvatting geconjugeerde

De geconjugeerde van een complex getal Z is het spiegelbeeld van Z in de reële as.

Deze wordt genoteerd als $\bar{Z}$.

Als $Z = (A, \phi)_p$ dan geldt $\bar{Z} = (A, -\phi)_p$

4.9 Optellen van complexe getallen: vectoroptelling

Eerder hebben we signalen opgeteld die draaiende pijlen zijn in het vlak. Daar telden we draaiende pijlen op met de parallellogramregel.

Bij complexe getallen doen we dat daarom ook zo. Dat geeft de beste aansluiting; zie paragraaf 4.3.

Een complex getal Z stelden we namelijk ook voor met een pijl van O naar Z .

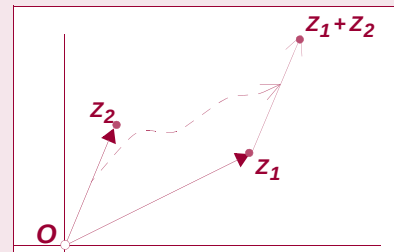
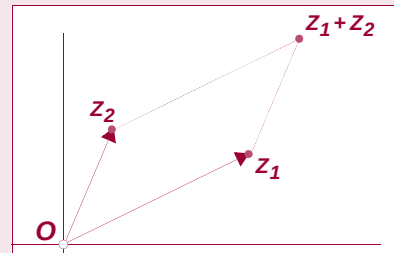
Definitie van de complexe optelling

De som $Z_1 + Z_2$ van twee complexe getallen Z_1 en Z_2 vinden we door van driehoek OZ_1Z_2 een parallellogram te maken. Het vierde punt is $Z_1 + Z_2$.

Of (en dat is hetzelfde) met de kop-staart-methode:

Pijl Z_2 wordt zo verschoven dat de staart ervan op de kop van Z_1 komt.

De punt van de verschoven pijl is $Z_1 + Z_2$.



Dat is een bekende methode en in deze vorm hoeven we de optelling nauwelijks te oefenen, dat heb je vast wel eerder gedaan. Een paar bijzonderheden onderzoeken we wel.

Opgave 4.25 Voorbeelden

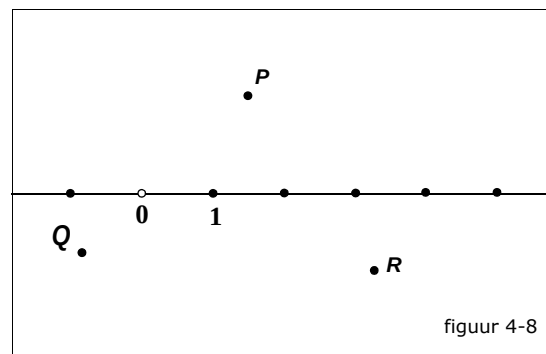
a. Teken in figuur

$$P + R$$

$$R + Q$$

$$P + Q$$

b. Bij $P + Q$ werkt de parallellogrammethode niet zo handig, maar de kop-staartmethode wel. Wat is de oorzaak daarvan?



figuur 4-8

Opgave 4.26 Definitie en eigenschappen van $-Z$

a. Teken in figuur 4-9 ook het punt U waarvoor geldt:

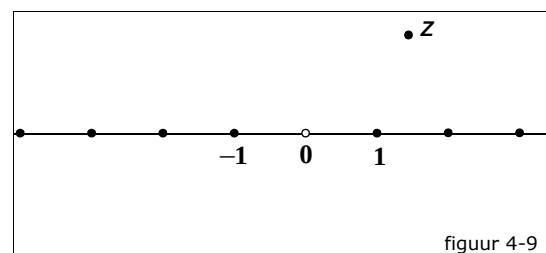
$$Z + U = 0.$$

Over $-Z$ hebben we het helemaal niet gehad, maar we willen natuurlijk wel dat geldt $Z + (-Z) = 0$. Kortom: de gevonden U 'is' per definitie $-Z$.

b. Lees nauwkeurig en toon aan:

$$(-1) \cdot Z = -Z \quad \text{formule 4-3}$$

Bekende kost? Nee, want je moet nu echt alles lezen volgens de definities van complexe getallen.



figuur 4-9

Tip: Schrijf (-1) en Z in poolnotatie. Werk het product uit, laat zien dat het met de definitie van $-Z$ overeenkomt.

Opgave 4.27 Drie complexe getallen optellen

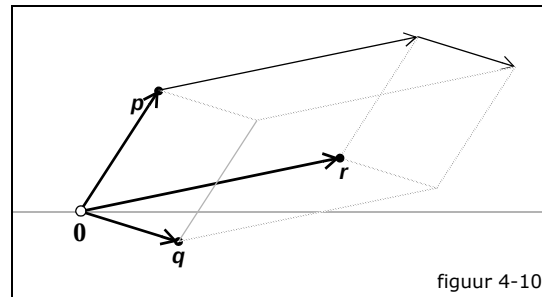
Je weet dat $12 + 47 + 91 = 12 + 91 + 47 = 47 + 12 + 91 = 47 + 91 + 12 = 91 + 12 + 47 = 91 + 47 + 12$.

Bij complexe getallen p , q en r geldt dat ook.

In plaats van een echt bewijs bekijken we deze aardige figuur, waarin je een hoop parallelogrammen kunt ontdekken.

Je kunt er een ruimtelijk object in zien; het is uit parallelogrammen opgebouwd, zo'n ding heet 'parallelepipedum'.

In de figuur is de kop-aan-staartoptelling $p + r + q$ met doorgetrokken pijlen aangegeven.



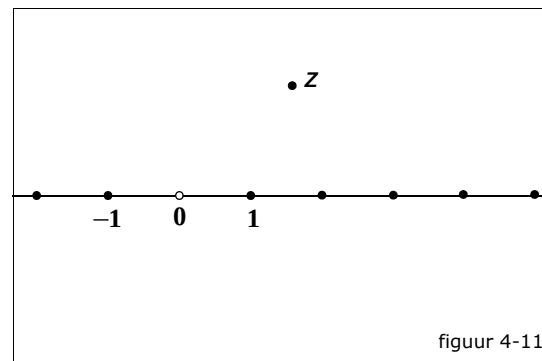
- Geef met verschillende kleuren de kop-aan-staartoptellingen $q + r + p$ en $r + q + p$ aan.
- Teken in deze figuur ook de pijl naar $q + r$.
Teken het parallelogram dat je gebruikt om p en $(q + r)$ op te tellen.

Optellen en conjugeren**Opgave 4.28 We onderzoeken $Z + \bar{Z}$**

- Laat met behulp van tekenen in figuur 4-11 zien dat het resultaat voor alle mogelijke Z op de reële as ligt.
- Geef een voorbeeldgetal U , waarvoor geldt dat $U + U$ kleiner dan nul is.
- Is er een complex getal V met $V + V = 0$?

Zeker wel.

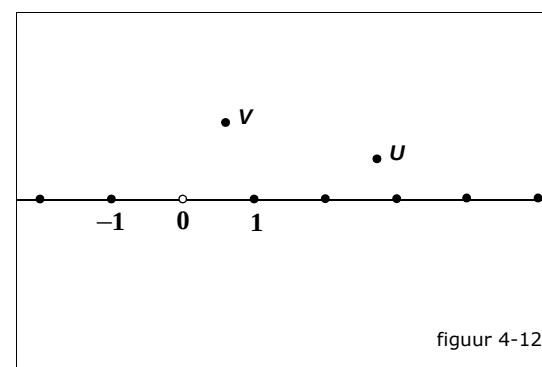
Teken er een paar.

**Opgave 4.29 De optelwet voor conjugeren**

We hebben al gezien dat $\bar{U} \cdot \bar{V} = \overline{U \cdot V}$, dat was opgave 4.24 d.

Bewijs nu, na tekenen van de geconjugeerden en uitvoeren van de optellingen via de parallelogramconstructie uit te voeren, dat ook geldt:

$$\bar{U} + \bar{V} = \overline{U + V} \quad \text{formule 4-4}$$

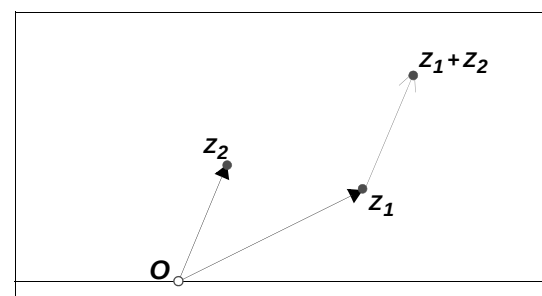
**Optellen en absolute waarden****Opgave 4.30 Een ongelijkheid over de absolute waarde**

- Voeg in deze figuur de pijl voor $Z_1 + Z_2$ toe.
- Leg uit waarom geldt:

$$|Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

Verwijs in je uitleg naar een bekend feit uit de meetkunde.

- Wanneer geldt het gelijkheidsteken?

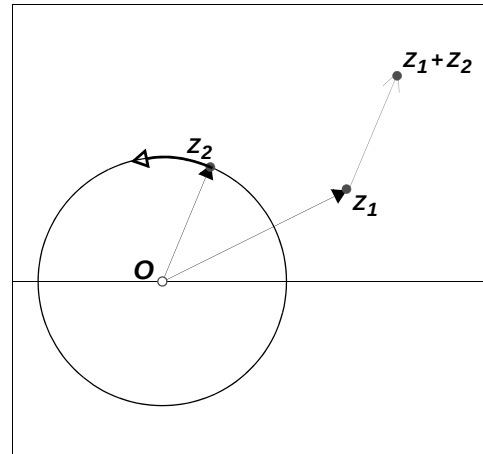


Opgave 4.31 Een bewegend punt

Stel je bij de figuur hiernaast voor dat Z_2 rondgaat over de aangegeven cirkel om O

- Teken de baan die $Z_1 + Z_2$ dan beschrijft.
- Geef in de figuur de posities van Z_2 aan waarbij $Z_1 + Z_2$ de grootste en de kleinste lengte heeft.
- Leg uit dat voor alle complexe getallen Z_1 en Z_2 geldt:

$|Z_1 + Z_2|$ kan nooit kleiner zijn dan
het verschil van $|Z_1|$ en $|Z_2|$.



Opgave 4.32 Samenvatting

Het voorgaande kun je samenvatten in deze regel:

$$||Z_1| - |Z_2|| \leq |Z_1 + Z_2| \leq |Z_1| + |Z_2|$$

formule 4-5

- Waarom staan aan de linkerkant absolute waardestrepn om $|Z_1| - |Z_2|$?
- Klopt deze regel ook voor gewone getallen?

Opgave 4.33 Cirkelvergelijkingen

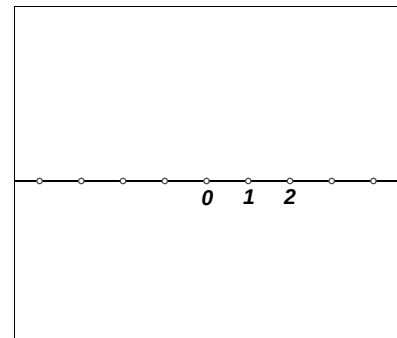
Als a een positief getal is, dan vormen de complexe getallen waarvoor geldt $|z| = a$ een cirkel. $|z| = a$ is de vergelijking van de cirkel om O met straal a .

- Geef de vergelijking van de cirkel om het punt 3 met straal 2.
- Wat stelt deze 'ongelijkheid' voor: $|z| \leq 5$?

Opgave 4.34 Getallen met absolute waarde tussen 1 en 3

Laat u een complex getal zijn met absolute waarde 3 en v een met absolute waarde 1. De mogelijke waarden voor u en v liggen op de cirkels met straal 1 en straal 3 om O .

Voor $u + v$ zijn er heel wat mogelijkheden.
Teken hiernaast het gebied waarin $u + v$ moet liggen.



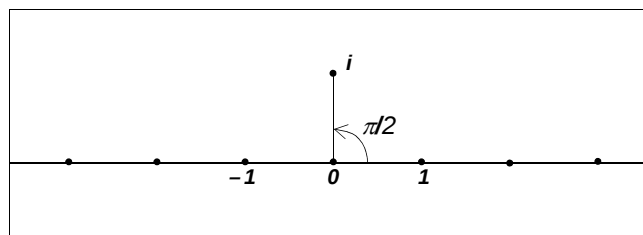
4.10 Het beroemde getal i , de wortel uit -1

Van het getal $(1, \pi/2)_p$ weten we: $(1, \pi/2)_p \cdot (1, \pi/2)_p = (1, \pi)_p = -1$. Dat wist je al bij opgave 4.11.

Dit complexe getal is dus een oplossing van de vergelijking $z^2 = -1$.

Dit getal heeft een speciale naam: i . De i is de i van *imaginair*: denkbeeldig.

Hier in figuur 4-13 is het stukje complexe vlak waar i in ligt getekend:



figuur 4-13

Opgave 4.35 'De' wortel uit -1

i wordt in de volksmond wel 'de wortel uit -1 ', genoemd. Gedurfd genoteerd als $\sqrt{-1}$. Maar er is nóg een wortel uit -1 . Welk complex getal is dat?

Opgave 4.36 i in onderzoek

a. Wat is

- de absolute waarde van i ?
 - het argument van i ?
 - de geconjugeerde van i ? Geef deze in figuur 4-13 hierboven aan.
- b. De getallen $1, i, -1$ en $-i$ vormen een vierkant! Waarom is dat zo?
- c. Laat zien waarom geldt: i is een vierdemachtswortel uit 1 .
- d. i ligt op de eenheidscirkel. Teken die in figuur 4-13 erbij.
- e. Heeft i zelf misschien ook een wortel? D.w.z. is er een complex getal dat in het kwadraat juist gelijk i is? Zijn er misschien meer van die getallen?

Opgave 4.37 Rekenen met het getal i valt mee; de hogere machten zijn

Je hebt steeds de extra regel dat je i^2 door -1 kunt vervangen.

a. Bereken nu de waarden van de rij $u_n = i^n$ voor $n = 0, 1, 2, \dots, 12$.

Wat is de *periode* van de rij?

b. Druk i^{-14} in eenvoudiger vorm uit.

Opmerkingen over de geschiedenis van i

(1) Op het gebruik van i is een andere notatiemethode voor complexe getallen gebaseerd. Die gaan we zo direct bespreken. De combinatie van inzicht uit de tot nu toe gevolgde opzet met de nieuwe notatie is heel krachtig. Dat merken we straks als we weer aan elektrische netwerken rekenen.

(2) De wortel uit -1 kreeg de naam i van de wiskundige Leonard Euler. Het is niet zo dat eerst i werd uitgevonden en dat daarmee de complexe getallen werden gemaakt. Al in de 16e eeuw ontdekte Girolamo Cardano bij het oplossen van derdegraadsvergelijkingen, dat het werken met wortels uit negatieve getallen bruikbaar was om een oplossing van bepaalde derdegraadsvergelijkingen te vinden, óók als de uiteindelijke oplossing een normaal reëel getal was. Maar het is voorzichtig gezegd op zijn minst onduidelijk of Cardano echt begreep wat er aan de hand was

Meer hierover: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Quadratic_etc_equations.html.

4.11 Cartesische notatie

In deze paragraaf gaan we met dezelfde complexe getallen werken, maar we gaan ze op een andere manier opschrijven. Je kunt ter vergelijking denken aan Arabische en Romeinse cijfers. Twee totaal verschillende manieren om dezelfde getallen op te schrijven. De ene is nuttig voor rekenen en cijferen, de andere alleen nog voor jaartallen op oude gebouwen. Bij complexe getallen zijn beide manieren nuttig gebleven.

Bij de nieuwe notatie van deze paragraaf werken we met een gewoon coördinatenstelsel. Dat heet het *cartesisch assenstelsel*, naar René Descartes, die er intensief gebruik van maakte.

Het getal i heb je ontmoet in de vorige paragraaf. Daar was het belangrijkste feit dat $i \cdot i = -1$.

Nu gaan we gebruiken dat i de lengte 1 heeft en dat het lijntje van 0 naar i loodrecht op de horizontale lijn staat in het complexe vlak. Daardoor kun je de andere punten van het vlak ook op een nieuwe manier aangeven!

Je weet nu uit de optelregel (parallelogram afmaken!) waar het getal $1 + i$ ligt. Zie figuur 4-14.

Als laatste voorbeeld is nog het getal $3 + 2i$ aangegeven.

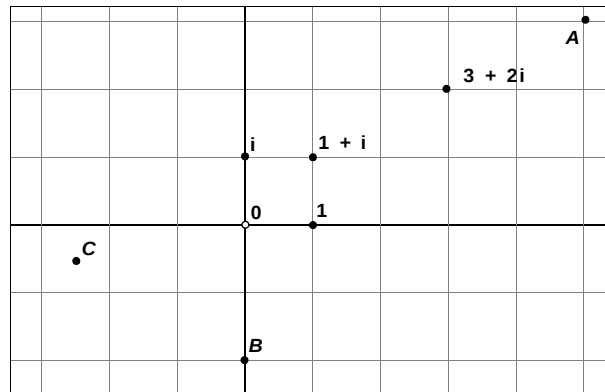
Wat je net geleerd hebt, is de z.g. *cartesische notatie* voor complexe getallen. Het verband met gewone coördinaten is je vast niet ontgaan.

Opgave 4.38 Cartesische coördinaten gebruiken

In figuur 4-14 zie je de complexe getallen 1, 0, i en $-1 + i$ in het complexe vlak.

- Geef ook de getallen 3 en $2i$ aan en laat zien dat het getal waar ' $3 + 2i$ ' bij staat, inderdaad de vectorsom van $2i$ en 3 is.
- Noteer de cartesische notatie voor A, B en C in de figuur.
- Noteer het punt midden tussen A en B in cartesische notatie.

Er geldt: $\frac{A+B}{2} = -C$. Ga dat na.



figuur 4-14

Rekenen in cartesische notatie

Voorbeeld 1. Vereenvoudig: $(1 + 2i) + (3 - 4i)$.

Antwoord: $(1 + 2i)$ is zelf al een optelling, van 1 en $2i$.

Splits, breng de horizontale en verticale componenten bij elkaar, hergroepeer. Niets nieuws onder de zon:

$$(1 + 2i) + (3 - 4i) = 1 + 2i + 3 - 4i = 1 + 3 + 2i - 4i = 4 + (2 - 4)i = 4 - 2i$$

Voorbeeld 2. Vereenvoudig $(1 + 2i) \cdot (3 - 4i)$.

Antwoord: ook hier mag je alle algebra die je kent inzetten. Maar gebruik zeker dat $i \cdot i = -1$.

Doe dat zo gauw het kan; laat geen hoge machten van i rondslingeren. Zo dus:

$$(1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-4i) + 2i \cdot 3 + 2i \cdot (-4i) = 3 + (-4+6)i - 8 \cdot (-1) = 11 + 2i$$

Opgave 4.39 Bereken:

- $(1 - 3i) \cdot (4 + 3i) =$
- $(2 - i) \cdot (i - 2) =$
- Als a , b , c en d gewone getallen zijn, zijn $a + bi$ en $c + di$ complexe getallen. Werk uit:
 $(a + bi) \cdot (c + di) = (\dots\dots\dots) + (\dots\dots\dots)i$

Opgave 4.40 Zou het écht wel zo zijn: $(1 + 2i) \cdot (3 - 4i) = 11 + 2i$?

- Controleer het met de GRM.
 (Kies onder MODE de optie 'A+BI'.

De Ti83 heeft een aparte toetscombinatie voor i : **SHIFT** **·**.

- Laat je GRM ook $(1 + i)^8$ uit rekenen. Het antwoord had je ook zonder GRM wel kunnen vinden, en ook wel zonder veel rekenen. Hoe? (Tip: de Z van opgave Opgave 4.18 is juist $1 + i$)
- Sla $(2 - 3i)$ op in geheugen Z van de TI83. Zo: $(2 - 3i) \text{ STO} > \text{Z}$.
 Bereken nu $1/(1 + 1/Z)$.

Opgave 4.41 De som van twee kwadraten in factoren ontbinden

- Bereken $(4 - i) \times (4 + i)$ en $(5 + 2i) \times (5 - 2i)$
- Je kent de ontbinding
 $a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$.
 Reken nu na dat
 $a^2 + b^2 = (a + bi) \cdot (a - bi)$.
- Ontbind de getallen 37 en 13 in twee factoren op de manier van opgave a.

Geconjugeerde en absolute waarde bij cartesische notatie

Op bladzijde 60 heb je de geconjugeerde van een complex getal leren kennen. Het was het spiegelbeeld van het getal in de reële as. Het is niet moeilijk te bedenken wat de geconjugeerde van een getal is als je de cartesische notatie kent: het spiegelbeeld van bijvoorbeeld $2 + 3i$ in de reële as is $2 - 3i$.

Je hebt (op bladzijde 59) de *absolute waarde van een complex getal* leren kennen als *de afstand van dat getal tot 0*. Voor de afstand tussen twee punten, waarvan je de coördinaten weet, gebruik je de formule van Pythagoras.

Opgave 4.42 Geef de geconjugeerden van

- $13 + 4i$, $-7 + 5i$, $12 - 3i$
- $a + bi$ als a en b reële getallen zijn
- $a + ci + b$ als a , b en c reële getallen zijn.

Opgave 4.43 Bereken (met Pythagoras) de absolute waarde van

- $-3 + 2i$ (zie desnoods figuur 4-14)
- $a + bi$ en $a - bi$.

Let op:

De absolute waarde van een complex getal is altijd een reëel niet negatief getal.

Opgave 4.44 Samenhang met formule c (bladzijde 60)

Laat z nu het complexe getal $(3 + 5i)$ zijn.

- Bepaal de geconjugeerde z en bereken de absolute waarde $|z|$.
- Bereken ook het kwadraat van de absolute waarde met behulp van formule c. (Het resultaat van vraag b is vanzelf nooit negatief.)
- Toon aan: als $|z| = 0$, dan is z zelf gelijk aan 0.

Delen bij cartesische notatie

Een getal als $\frac{7-4i}{2}$ is gemakkelijk in het complexe vlak aan te wijzen. Maar dit getal niet: $\frac{3+5i}{4-i}$.

Dat komt omdat er een i in de noemer voorkomt. Je moet nu (reële) getallen a en b zoeken, zó, dat $(a + bi) \times (4 - i) = 3 + 5i$.

Dat kan via wat rekenwerk, maar het is een een moeizame weg. De handige manier die we later veel gebruiken is: *gebruik maken van de geconjugeerde en van formule d*.

Opgave 4.45 Hoe verdwijnt i vlot uit de noemer

Zo: *vermenigvuldig in* $\frac{3+5i}{4-i}$ teller en noemer met de geconjugeerde van $4 - i$.

a. Werk uit: $\frac{(3+5i) \cdot (4+i)}{(4-i) \cdot (4+i)}$

- b. Herschrijf de volgende breuken in de vorm $p + qi$

$$\frac{3-2i}{2+i}$$

$$\frac{303}{10-i}$$

$$\frac{8+6i}{4+3i}$$

$$\frac{1}{a+bi}$$

$$\frac{-1}{i}$$

Absolute waarde bij vermenigvuldigen en delen**Opgave 4.46 Nog meer regels als $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$**

Er geldt ook: $|Z_1 / Z_2| = |Z_1| / |Z_2|$, maar natuurlijk alleen als Z_2 niet gelijk in 0 is.

Bepaal nu met gebruikmaking van deze formule de absolute waarden van (a en b zijn reëel)

$$\frac{5}{1+2i}, \frac{8+6i}{3+4i}, \frac{1}{a+bi}, \frac{b-ai}{a+bi}, (b-ai) \cdot (a+bi)$$

Absolute waarde en afstand

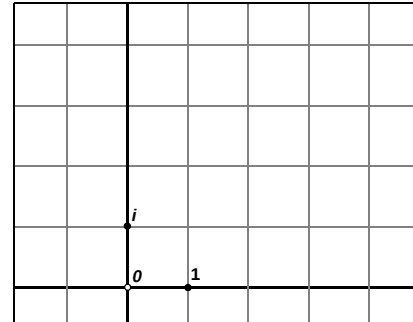
Opgave 4.47 De absolute waarde van $(Z_1 - Z_2)$ in het complexe vlak

Deze is ook de afstand van Z_1 en Z_2 in het complexe vlak. Waarom is dat zo?

Opgave 4.48 De kleinste vinden

Beschouw de complexe getallen van de vorm $Z = 3 + t \cdot i$, waar-
bij t de gewone reële getallen doorloopt.

- Teken al deze getallen in het complexe vlak, voor zover het past in figuur 4-15.
- Welke van deze getallen heeft de kleinste absolute waarde?
- Welk van deze getallen ligt het dichtst bij $(-3, 2i)$?
- Bepaal het complexe getal van de vorm $p + (4 - p)i$, p weer reëel, dat het dichtst ligt bij $-2 + 3i$.



figuur 4-15

4.12 'What's in a name bij cartesische notatie

De reële en imaginaire assen

Op bladzijde 59 stond

de vertrouwde gewone getallenlijn heet DE REËLE AS van het complexe vlak.

Voor de hand ligt nu de as loodrecht daarop ook een naam te geven:

de lijn door O en i heet DE IMAGINAIRE AS van het complexe vlak.

Reële deel, imaginaire deel

In cartesische voorstelling ziet een complex getal er zo uit: $a + bi$, waarbij:

- a en b twee gewone getallen zijn
- i het bijzonder complex getal is dat we in paragraaf.

De reële getallen a en b hebben namen in hun rol als bouwsteen voor $a + bi$. Als volgt:

Reële en imaginaire deel:

Als $z = a + bi$ heet a het reële deel en b het imaginaire deel van het complexe getal z ; ze worden aangegeven met $\text{Re}(z)$ en $\text{Im}(z)$.

Opgepast:

Het imaginaire deel van een complex getal is dus een *reëel getal*. Het is nu eenmaal de gewoonte niet bi , maar b het imaginaire deel te noemen. Raar, maar het went wel.

Opgave 4.49 Noteer de reële en imaginaire delen van de volgende getallen:

- a. $13 - 14i$ b. $2i - 7$ c. $i(3 - 2i)$ d. $3 + 7i + 4 - 12i$ e. 2

Opgave 4.50 Bepaal ook:

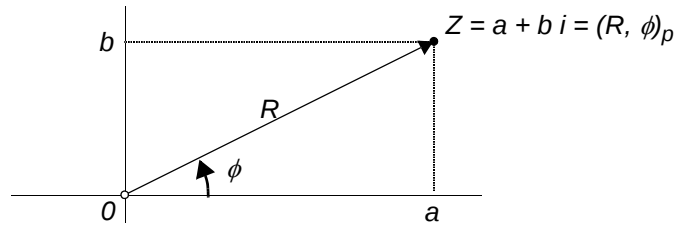
- $\text{Re}(3 + 5i)$; $\text{Im}((1 + i)(1 + i))$.
- Als $a = 3 + i$ en $b = i - 2$, wat is dan $\text{Im}(a + bi)$?

Samenvatting complex, reëel, imaginair getal

Getallen van de vorm $a + bi$ heten complex, ook als a of b gelijk 0 is. Als $b = 0$, heet het getal reëel, als $a = 0$ heet het getal zuiver imaginair.

4.13 Samenhangen tussen twee notaties

In figuur 4-16 zie je het getal Z op twee manieren aangegeven: via polaire notatie en via cartesische notatie.



figuur 4-16

Als $Z = a + bi$ in cartesische schrijfwijze, dan moeten de absolute waarde R en het argument ϕ van Z ook in a en b uitgedrukt kunnen worden. Dat hebben we nog niet gedaan!

Als $Z = (R, \phi)_p$ in polaire notatie, dan moeten het reële en imaginaire deel van Z , dus a en b , uitgedrukt kunnen worden in R en ϕ . Ook dat hebben we nog niet gedaan!

Opgave 4.51 Ga na dat de volgende *omzettingsregels* van cartesische naar polaire notatie gelden:

- $R = \sqrt{a^2 + b^2}$
- $\tan(\phi) = \frac{b}{a}$ tenzij, want dan

Opgave 4.52 Druk zelf a en b in R en ϕ uit:

- $a = \dots$
- $b = \dots$

Opgave 4.53 Vul aan:

- Het reële deel van $(R, \phi)_p$ is
- Het imaginaire deel van $(R, \phi)_p$ is
- Het argument van $a + bi$ is (veronderstel a en b reëel)
- De absolute waarde van $a + bi$ is (veronderstel a en b reëel)

Opgave 4.54 Zet om van de ene notatie naar de andere

Doe het zo mogelijk exact; mogelijk komt er een wortel of een uitdrukking met π in je antwoord.

- Van cartesisch naar polair: $(2 + i)$, $-1 + 2i$, -23 , 13 , $-2 - i$.
(*Addertje onder het gras*: Als het resultaat van de eerste en de laatste hetzelfde is, doe je iets niet helemaal goed ...)
- Van polair naar cartesisch: $(1, \pi/3)_p$, $(3, 2\pi/5)_p$, $(5, 2\pi/7)_p$.

Het addertje onder het gras

Een mogelijke reactie op een van de vragen is: het argument van $a + bi$ is, als $b \neq 0$, gelijk aan $\tan^{-1}(a/b)$ (in de notatie van veel rekenmachines).

Maar dan zouden $(2 + i)$ en $(-2 - i)$ hetzelfde argument hebben. In werkelijkheid verschillen die twee argumenten π , maar de tangenswaarden ervan zijn wel gelijk, namelijk $1/2$.

In de meeste programmeertalen zijn twee verschillende functies voor de inverse van de tangens ingebouwd. In EXCEL zijn het ATAN en ATAN2. ATAN(a/b) doet hetzelfde als de eenvoudige rekenmachine. Bij ATAN2 moet je zowel a als b opgeven om de juiste waarde te krijgen: ATAN2(a, b). Probeer!

4.14 i draait ook een kwartslag naar links

Het getal i kwam je veel tegen in uitdrukkingen als $3 + 2i$, of $a + bi$, waarbij a en b reëel zijn.

Op deze bladzijde maken we er gebruik van dat het getal i ook een betekenis heeft in poolcoördinaten:

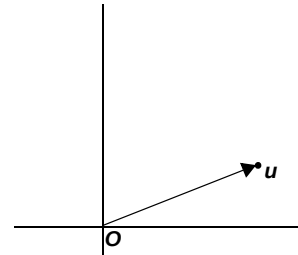
het is het getal met absolute waarde 1 en argument $\pi/2$. Vermenigvuldigen van een complex getal met i heeft daarom een eenvoudige meetkundige betekenis, die van groot belang is bij de elektrische schakelingen in het volgende hoofdstuk.

Op deze bladzijde een oefening en een meetkundige toepassing.

Opgave 4.55 Een vierkant maken (1)

In de figuur hiernaast is u een complex getal, en natuurlijk ook een punt in het complexe vlak.

- Construeer nauwkeurig in de figuur het punt $i \cdot u$ aan.
- Trek de lijnstukken van O naar u en $i \cdot u$. Je hebt nu de helft van een vierkant getekend.
- Construeer ook het vierde punt van dat vierkant en laat zien dat dat het getal $(1 + i) \cdot u$ is.
- Teken ook de twee laatste zijden van het vierkant, hun middens en het midden van het vierkant zelf.
Druk ook die laatste drie punten in u uit met behulp van het getal i .



Dit is een handige informele regel om te onthouden:

Vermenigvuldigen met i is draaien naar links over een rechte hoek.

Opgave 4.56 Vermenigvuldigen met $-i$

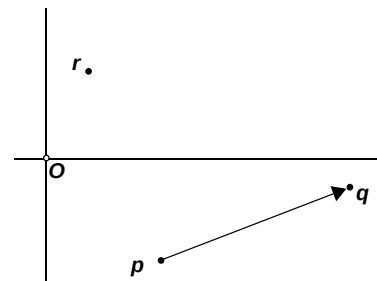
Formuleer ook zo'n handige informele regel voor vermenigvuldigen met $-i$.

Opgave 4.57 Een vierkant maken (2)

In de figuur hiernaast zijn p en q een complexe getallen, en natuurlijk ook punten in het complexe vlak.

De pijl van p naar q is ook het complexe getal $q - p$.

- Laat dat zien door optellen van de complexe getallen p en $q - p$.
- Gegeven is dat r een hoekpunt van het vierkant op pq is.
Toon aan: $r = p + i \cdot (q - p)$
- Laat s het laatste punt van het vierkant zijn. Teken s en druk s in p en q uit, uiteraard met steun van trouwe makker i .



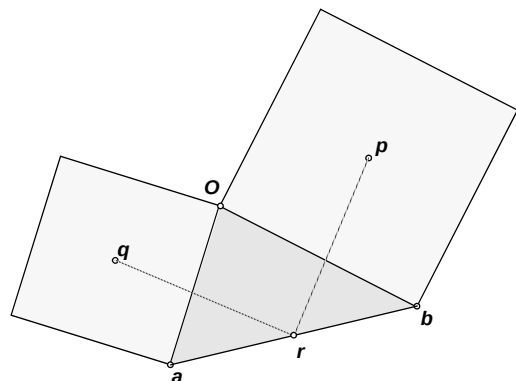
De volgende opgave vraagt om een bewijs van een meetkundige stelling. De betrekkelijk eenvoudige middelen van de vorige opgaven zijn genoeg om deze -onverwachte- stelling te bewijzen.

Opgave 4.58 Stelling van de twee vierkanten

In deze figuur is Oab een driehoek, waarbij op de zijden Oa en Ob naar buiten een vierkant is geplaatst. p en q zijn de middens van de vierkanten en r is het midden van ab .

Bewijs dat pr en qr in lengte gelijk zijn en loodrecht op elkaar staan.

Tip: Neem O als de oorsprong van het complexe vlak en druk p , q en r in a , b en uiteraard i uit. Reken dan de loodrechtheid na.



4.15 De algebra van absolute waarde en geconjugeerde

Overzicht

Deze bladzijde bevat samenvattende overzichten van de eigenschappen van absolute waarde en conjugereren. In het overzicht zijn Z , Z_1 en Z_2 steeds complexe getallen en a en b steeds reële getallen.

Ze worden gevolgd door een kleine algemene beschouwing over beide.

Absolute waarde	Conjugeren
definitie en notatie De absolute waarde van Z, genoteerd met Z, is de afstand van Z tot de oorsprong O. Z is een <i>reëel</i> getal. Eigenschappen (1) Als $Z = a + b i = (R, \phi)_p$, dan geldt $ Z = \sqrt{a^2 + b^2} = R$ (2) $Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2$ (3) $Z_1 / Z_2 = Z_1 / Z_2$ als $Z_2 \neq 0$ (4) $Z_1 - Z_2 \leq Z_1 \pm Z_2 \leq Z_1 + Z_2$	definitie en notatie De geconjugeerde van Z, genoteerd met $\bar{Z}$, is het spiegelbeeld van Z in de reële as. $\bar{Z}$ is een <i>complex</i> getal. Eigenschappen (1) Als $Z = a + b i = (R, \phi)_p$, dan geldt $\bar{Z} = a - b i = (R, -\phi)_p$ (2) $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2$ (3) $\overline{Z_1 / Z_2} = \bar{Z}_1 / \bar{Z}_2$ als $Z_2 \neq 0$ (4) $\overline{Z_1 \pm Z_2} = \bar{Z}_1 \pm \bar{Z}_2$
Samenhang	
(5) $Z = \bar{Z}$ (6) $Z ^2 = Z \cdot \bar{Z}$	

Overeenkomst en verschil

Er zijn diverse overeenkomsten. Het maakt bij vermenigvuldigen en delen niet uit of je eerst de bewerking conjugereren of absolute waarde nemen toepast, en dan vermenigvuldigt, of dat je dat in de andere volgorde doet.

Wat de optelling betreft, zijn er in dit opzicht juist verschillen. Bij conjugereren maakt de volgorde van bewerkingen weer niet uit, bij de absolute waarde geldt bijna nooit dat de absolute waarde van de som juist de som van de absolute waarden is.

Bij conjugereren kun je zeggen dat het conjugereren volledig compatibel is met de algebraïsche bewerkingen. Dat betekent: heb je een of ander algebraïsch verband tussen complexe getallen, dan geldt het verband waarbij je van alle getallen de geconjugeerde neemt óók.

In het bijzonder geldt: als je een verband hebt met alleen reële getallen en i erin, blijft het verband kloppen als je elke i in het verband vervangt door $-i$. Voorbeeld:

$$\text{Omdat } \frac{5+i}{13-7i} + \frac{3-i}{7+2i} = \frac{65-17i}{105-23i} \quad \text{geldt ook: } \frac{5-i}{13+7i} + \frac{3+i}{7-2i} = \frac{65+17i}{105+23i}$$

Je kunt het zo zeggen: i en $-i$ zijn niet algebraïsch te onderscheiden!

Het is eigenlijk niet goed om te zeggen: i is dé wortel van -1 .

Beter, maar een tikje pedant: i is 'n wortel van -1 en $-i$ is de andere.

4.16 De eenheidscirkel wijst de weg

Cartesische vorm van $(1, \alpha)_p$

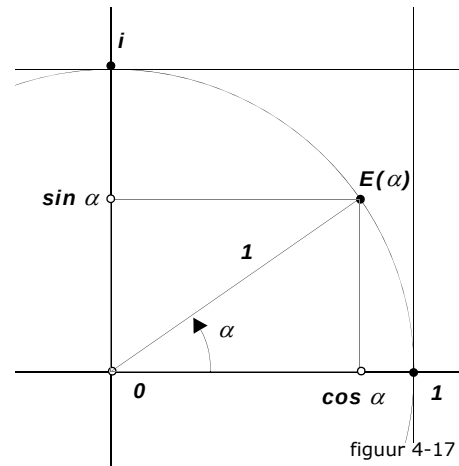
$(1, \alpha)_p$ is het complexe getal op afstand 1 van 0 in de richting α . We noemen dat getal (of punt) nu $E(\alpha)$. Zie figuur 4-17.

De figuur laat de cartesische notatie ervan zien:

$$E(\alpha) = (1, \alpha)_p = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha) \quad \text{formule 4-6}$$

Hier is $E(\alpha)$ op twee manieren voorgesteld.

$E(\alpha)$ ligt uiteraard op de eenheidscirkel.



Opgave 4.59 Bijzonderheden van $E(\alpha)$

a. Leid met behulp van de poolnotatie af dat

$$E(\alpha_1) \cdot E(\alpha_2) = E(\alpha_1 + \alpha_2) \quad \text{formule 4-7}$$

b. Leg uit (met behulp van onderdeel a) dat:

$$E(\beta)^n = E(n \cdot \beta) \quad \text{formule 4-8}$$

Opgave 4.60 Vooruitblik

a. Laat zien dat de getallen $E(0)$, $E\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ en $E\left(\frac{4\pi}{5}\right)$ voldoen aan de vergelijking $z^5 = 1$ en geef nog twee andere getallen die dat doen.

b. Laat zien dat de getallen $E\left(\frac{q}{n} \cdot 2\pi\right)$ voor gehele n en q voldoen aan de vergelijking $z^n = 1$.

Tussenopmerking

In formule 4-7 en 4-8 kunnen we in plaats van $E(\dots)$ ook de cartesische vorm van formule 4-6 opnemen. Dan vinden we fraaie eigenschappen van sinus en cosinus.

De getallen $E\left(\frac{q}{n} \cdot 2\pi\right)$ op de eenheidscirkel zijn werkelijk de kroonjuwelen van het complexe vlak.

Ze hebben bijzondere eigenschappen.

Op deze beide vervolgaspecten van getallen op de eenheidscirkel gaan we nu niet in, omdat we die voor de elektrische netwerken niet direct nodig hebben. Ze komen wel in hoofdstuk 6 aan bod.

Opgave 4.61 Getallen met andere absolute waarde in E uitdrukken

Laat zien dat

$$(R, \alpha)_p = R \cdot E(\alpha) \quad \text{formule 4-9}$$

door een afleiding te starten met:

$$(R, \alpha)_p = (R, 0)_p \cdot \dots = \dots$$

4.17 Op weg naar de complexe e-macht

E lijkt een oude bekende!

De formule 4-7 heeft een bekend patroon, als je alleen naar de uiterlijke vorm kijkt:

$$E(\alpha_1) \cdot E(\alpha_2) = E(\alpha_1 + \alpha_2)$$

Je weet bijvoorbeeld dat de functie 2^x zich zo gedraagt:

$$2^{x_1} \cdot 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$$

En net zo alle e-macht functies e^{ct} :

$$e^{ct_1} \cdot e^{ct_2} = e^{c(t_1 + t_2)}$$

Maar de getallen $E(\alpha)$ zijn over het algemeen complex en die machten van 2 en e zeker niet. We gaan proberen of we niet toch de e -machten en de E -punten met elkaar in verband kunnen brengen.

In deze paragraaf komen we daarbij ook weer dicht bij de elektrische schakelingen. Om de overgang wat makkelijker te maken, gebruiken we nu weer bij de formules de hoeksnelheid ω , maar we sluiten toch direct aan bij paragraaf 4.16. De daar gebruikte α is nu steeds vervangen door ωt . De straal R betrekken we straks ook weer in de beschouwingen.

Formule 4-7 kunnen we nu invullen met twee verschillende waarden, ωt_1 en ωt_2 :

$$E(\omega t_1) \cdot E(\omega t_2) = E(\omega(t_1 + t_2)) \quad \text{formule 4-10}$$

Roteren in twee notaties

In hoofdstuk 2 hebben we een roterend punt $Q(t)$ beschreven in coördinaten; kies nu fase = 0 en $R = 1$:

$$Q(t) \quad \begin{cases} x(t) = \cos(\omega t) \\ y(t) = \sin(\omega t) \end{cases} \quad \text{formule 4-11}$$

Na de vorige paragraaf is het duidelijk dat dezelfde beweging in complexe getallen beschreven kan worden met behulp van de notatie met E van de vorige paragraaf.

$$E(\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t) \quad \text{formule 4-12}$$

We hebben in hoofdstuk 2, paragraaf 2.9 ook de snelheid van het punt Q als vector gevonden.

$$\frac{dQ(t)}{dt} \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(\cos(\omega t)) = -\omega \cdot \sin(\omega t) \\ \frac{d}{dt}(\sin(\omega t)) = \omega \cdot \cos(\omega t) \end{cases} \quad \text{formule 4-13}$$

Opgave 4.62 Snelheid als complex getal

Van het bewegend punt Q of, dat is hetzelfde, van $E(\omega t)$ kunnen we ook de snelheid als complex getal bepalen.

a. Laat zien dat die volgens formule 4-13 is:

$$-\omega \cdot \sin(\omega t) + i\omega \cdot \cos(\omega t)$$

b. Toon aan dat dit gelijk is aan

$$i\omega E(\omega t)$$

c. Hoe volgt hieruit dat de snelheidsvector van $E(\omega t)$ ω keer zo groot is als $E(\omega t)$ zelf en $\pi/2$ in fase voorloopt.

De afgeleide naar t van $E(\omega t)$

We kunnen de snelheid van het bewegend punt $E(\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ ook bepalen door differentiëren. In deze formule zie je dat je dat voor de reële en de imaginaire delen apart kunt doen. Die afgeleiden weet je natuurlijk al, ze staan in formule 4-13.

We weten nu, vanwege de vorige opgave:

$$\frac{d}{dt}(E(\omega t)) = i\omega E(\omega t) \quad \text{formule 4-14}$$

De complexe e-macht als nieuwe notatie

De functie $E(\omega t)$ heeft twee bijzondere eigenschappen, uitgedrukt door de formules 4-10 en 4-14:

$$E(\omega t_1) \cdot E(\omega t_2) = E(\omega(t_1 + t_2)) \text{ en } \frac{d}{dt}(E(\omega t)) = i\omega E(\omega t)$$

Opgave 4.63 Functies die net zoiets presteren, zijn er meer!

Bekijk voor een vaste waarde c de functie e^{ct} .

Ga na dat deze functie voldoet aan

$$e^{ct_1} \cdot e^{ct_2} = e^{c(t_1 + t_2)} \quad \text{en} \quad \frac{d}{dt}(e^{ct}) = c \cdot e^{ct}$$

We zien:

$E(\omega t)$ gedraagt zich precies als e^{ct} , aangenomen dat we $c = i\omega$ zouden mogen kiezen.

De kern van de zaak

We willen daarom in plaats van de formule

$$E(\omega t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

voortaan de korte notatie

$$E(\omega t) = e^{i\omega t}$$

gaan gebruiken. We gaan dus voortaan in plaats van

$$\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

kort opschrijven:

$$e^{i\omega t}$$

Van de hulpfunctie E stappen we nu af en maken een *afspraken* over wat we noteren als een e-macht met een i in de exponent. In deze paragraaf gebruikten we

$$E(\omega t) = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

om ook de differentieerbaarheid te kunnen onderzoeken; daardoor komen we hier uit bij:

$$e^{i\omega t}$$

Maar we noteren de definitie van onze 'nieuwe' e-macht liever ook zonder associaties met hoekfrequentie en tijd, en daarom verschijnt in de volgende paragraaf de definitie van

$$e^{i\alpha}$$

voor reële waarden van α .

4.18 Definitie van de e-macht voor imaginaire getallen

Afspraak e-macht voor imaginaire getallen

Dit is de definitie:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \text{formule 4-15}$$

Je kunt $e^{i\alpha}$ voorlopig opvatten als een *handige afkorting* voor $\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$, waarin belangrijke rekenwetten op een mooie manier worden samengevat. De notatie vereenvoudigt daardoor rekenwerk door een nuttige notatie, eigenlijk zoals de Arabische cijfers in het getal 1934 je beter helpen bij rekenen dan de notatie DCDXXXIV. In het volgende hoofdstuk beproeven we dit nut bij rekenen aan ingewikkelder schakelingen dan die we eerder gezien hebben.

Je kunt het ook zo zien:

We *kennen* de functie e^x al voor reële waarden van x . Voor die waarden is e^x gedefinieerd als de e-tot-de-macht x . We breiden de werking van de functie e^x nu uit naar de imaginaire getallen.

De oude betekenis van e^x komt helemaal niet in conflict met de nieuwe van $e^{i\alpha}$. De een gaat over e-machten van getallen op de reële as, de andere is een nieuwe constructie bij getallen op de imaginaire as. Alleen als $x = \alpha = 0$ zou het mis kunnen gaan. Maar dan zijn beide gelijk aan 1. Geen conflict dus.

Het zal niet meevallen $e^{i\alpha}$ te begrijpen als een 'macht' zoals 2^3 of e^6 en dat moet je ook eigenlijk helemaal niet eens proberen. $e^{i\alpha}$ is een *gedefinieerd* ding.

Je kunt alvast denken dat we eerder van gehele machten over zijn gegaan naar *gebroken* en *negatieve* machten en zelfs naar *irrationale* machten als $e^{\sqrt{2}}$.

Ook daar is hetzelfde proces aan de gang geweest. Je kunt wel zeggen dat e^3 het getal is dat je krijgt door de vermenigvuldiging van drie e's met elkaar: $e^3 = e \cdot e \cdot e$, maar het vermenigvuldigen van min twee e's met elkaar om e^{-2} te vinden valt zacht gezegd niet mee.

In het slothoofdstuk breiden we de e-macht nogmaals uit tot de functie e^z die voor *alle* complexe getallen z een waarde heeft. Die functie blijkt een fraai totaalbeeld te leveren indien toegepast op alle complexe getallen. Dan zijn e^x en $e^{i\alpha}$ een slechts paar bijzonder waarden van het grotere geheel.

Rekenregels voor $e^{i\alpha}$ in een notendop

Deze rekenregel geldt:

$$e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha + \beta)} \quad \text{formule 4-16}$$

Om dat uit te leggen kun je niet verwijzen naar bekende regels voor machtsverheffen. Het bewijs begint met gebruik van de definitie, werkt dan de vermenigvuldiging uit en gebruikt weer de definitie. Volledig:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)) \cdot (\cos(\beta) + i\sin(\beta)) = \\ &= (1, \alpha)_p \cdot (1, \beta)_p = (1, \alpha + \beta)_p = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta) = \\ &= e^{i(\alpha + \beta)} \end{aligned}$$

Opgave 4.64 De andere regels bewijzen

Noteer ook een volledig bewijs voor de regels

$$(e^{i\alpha})^n = e^{in\alpha} \quad \text{formule 4-17}$$

$$\frac{d}{dt} e^{i\omega t} = i\omega e^{i\omega t} \quad \text{formule 4-18}$$

4.19 Afscheid van de notatie $(R, \alpha)_p$

De oude polaire notatie, die we gebruikten om kennis te maken met de complexe getallen, laten we nu varen. We weten namelijk nu dat

$$(R, \alpha)_p = R \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = R \cdot e^{i\alpha} \quad \text{formule 4-19}$$

In die vorm komen we de complexe getallen volop tegen in het volgende hoofdstuk, vooral natuurlijk met $\alpha = \omega t$. Daar leer je er ook in de praktijk handig mee werken.

Mocht je je toch afvragen wat dat vreemde machtsverheffen met imaginaire machten i s, denk dan terug wat er *bedoeld* werd:

$$R \cdot (e^{i\alpha}) = R \cdot (\cos(\alpha) + i \sin(\alpha)) = (R, \alpha)_p$$

Opgave 4.65 Noteer de volgende getallen met de nieuwe e -notatie

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$,
- De vijf vijfdemachtswortels uit 1.
- De getallen 0 , $4 + 3i$ en $2,34 - 5,67i$

Opgave 4.66 Noteer zo eenvoudig en exact mogelijk in cartesische notatie

$$\sqrt{2}e^{-i(\pi/4)}, e^{-i\pi}, e^{i\pi/2}, e^{2\pi i} \text{ en } 1 + e^{i\pi}$$

Opgave 4.67 Toon aan dat:

- $U_0 \cdot e^{i(\omega t + \phi)} = e^{i\phi} \cdot U_0 \cdot e^{i\omega t}$
- Als α reëel is, geldt: $e^{\overline{i\alpha}} = e^{-i\alpha} = \overline{e^{i\alpha}}$

Samenvatting

Vanaf nu gebruiken we steeds de vorm

$$R \cdot e^{i\alpha} \text{ in plaats van } (R, \alpha)_p$$

voor het complexe getal met absolute waarde R en argument α .

Er geldt deze cartesische omzetting:

$$R \cdot e^{i\alpha} = R \cdot (\cos \alpha + i \cdot \sin \alpha) = R \cos \alpha + i R \sin \alpha$$

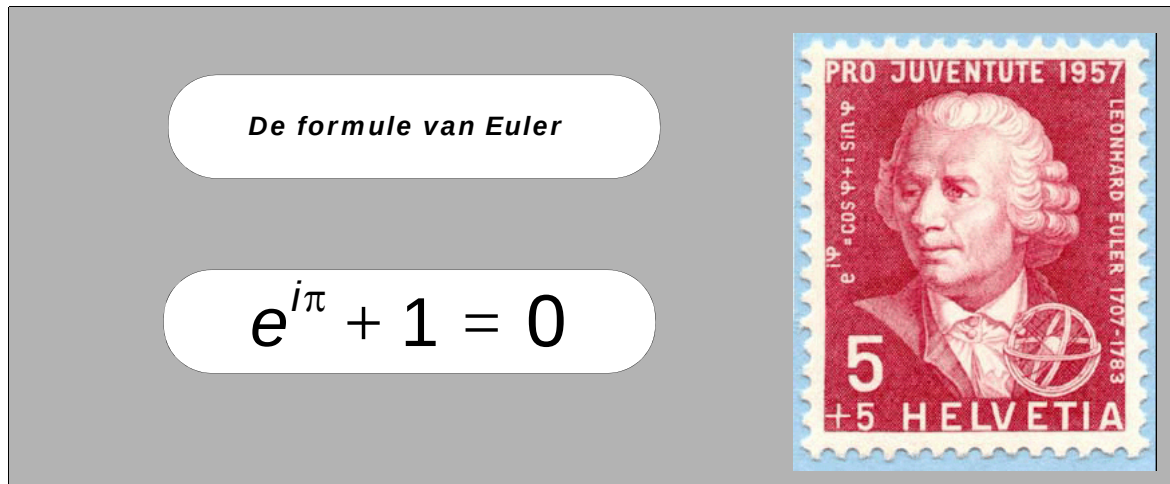
en deze rekenregel voor vermenigvuldigen:

$$\left(R_1 \cdot e^{i\alpha_1} \right) \cdot \left(R_2 \cdot e^{i\alpha_2} \right) = R_1 \cdot R_2 \cdot e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

4.20 Eulers formule

De definitie van ei^α die we gebruiken, heeft een paar verrassende gevolgen.

De eerste is een beroemde formule, de formule van Euler. Die is eigenlijk al bewezen als onderdeel van opgave 4.66, maar verdient het in de etalage gezet te worden.



figuur 4-18

Dit is voor veel mensen de mooiste formule van de wiskunde, omdat 0 , 1 , e , π en i erin samenkomen in één verband met de tekens voor de hoofdbewerkingen vermenigvuldigen en optellen, het gelijkteken en verder niets meer.

Euler leefde van 1707 tot 1783. Euler is een wiskundige die nooit bang was met 'wilde' vermoedens te komen, die pas later stevig onderbouwd konden worden.

Als postzegelverzamelaar kun je je specialiseren in het genre 'Euler'. Zie bovenstaand voorbeeld, waar de definitie van ei^ϕ op staat, die ook wel eens Eulers formule wordt genoemd; een Zwitserse zegel, uit het geboorteland van Euler.

Tot slot nog iets dat goed in deze paragraaf past: een formule die de gewone cosinusfunctie uitdrukt in de *imaginaire* e-macht.

Opgave 4.68 Verrassende formules voor sinus en cosinus

We hebben e^{ix} gedefinieerd met behulp van de sinus en de cosinus van x . Het kan ook andersom!

a. Toon aan voor gewone getallen x , dat

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

formule 4-20

b. Vind een soortgelijke formule voor $\sin x$.

4.21 Verrassende gevolgen: meerwaardige functies

Eulers formule vloeit direct voort uit de definitie van $e^{i\alpha}$. Als we op andere – schijnbaar voor de hand liggende manieren – met machten van complexe getallen gaan werken, ontstaan er wel problemen. In deze paragraaf tasten we de grenzen af!

Opgave 4.69 Wat is i^i ?

We weten dat

$$e^{i(\pi/2)} = i$$

Vervang de 'onderste' i in de uitdrukking i^i door $e^{i(\pi/2)}$ en reken zoals je gewend bent; vind je uitkomst in zes decimalen nauwkeurig.

Je kunt het ook rustig intoetsen op je GRM.

Verrassend is het wel: *imaginair tot een imaginaire macht is hier reëel!*

Maar klopt dat wel echt?

Bij zoiets vreemds als i^i komt er iets zinnigs uit de berekening en de GRM werkt er aan mee.

Toch is het maar een stukje van de waarheid. Er geldt namelijk, omdat $e^{2\pi i} = 1$, even zeker dat

$$e^{i(\pi/2) + 2\pi i} = i$$

Dus kunnen we ook opschrijven:

$$e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/2) + 2\pi i}$$

En hoe waar dat ook kan wezen, het heeft vreemde consequenties als we niet heel goed oppassen ...

Opgave 4.70 Reken de volgende afleiding eens nauwkeurig na . . .

a. Uitgangspunt:

$$e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/2) + 2\pi i}$$

b. Links en rechts tot de macht i verheffen:

$$\left(e^{i(\pi/2)}\right)^i = \left(e^{i(\pi/2) + 2\pi i}\right)^i$$

c. Uitwerken met bekende rekenregel voor machten

$$e^{i(\pi/2) \cdot i} = e^{(i(\pi/2) + 2\pi i) \cdot i}$$

d. leid de conclusie af:

$$e^{-\pi/2} = e^{-\pi/2 - 2\pi}$$

Ofwel: $0.20788 \approx 0.000388203$. Met die conclusie zul je het wel niet eens zijn. . .

e. Maar bij welke stap(pen) ging het dan eigenlijk mis?

Nawoord bij i^i

Het is niet zo makkelijk vast te stellen wat er nu precies mis gaat bij opgave 4.70. Er is meer fout en/of goed dan het lijkt. Het probleem zit al in het begin. We hebben zorgvuldig in het laatste stuk

van dit hoofdstuk afgesproken wat we bedoelen met de uitdrukking $e^{i\alpha}$, waarin α een reëel getal is.

Voor de uitdrukking i^i hebben we dat nog helemaal niet gedaan, maar we deden wel alsof we er gewoon mee mochten rekenen, inclusief de regel over gestapelde machten.

Nu is het best mogelijk betekenis te geven aan een uitdrukking als i^i , maar het is niet mogelijk dat die betekenis iets is als 'het is precies dat en dat bepaalde complexe getal'. Want zoals je zag, komen er dan duistere dingen te voorschijn.

We schreven i als een macht van e . Zo: $e^{i(\pi/2)} = i$. Wat hier in de exponent staat, zou je kunnen lezen als 'natuurlijke logaritme van i '. Nu heeft een gewoon (positief) getal precies één natuurlijke logaritme, maar uit $e^{i(\pi/2)} = e^{i(\pi/2) + 2\pi i}$ blijkt dat het bij complexe getallen minder simpel ligt. Daar moet je accepteren dat er méér (natuurlijke) logaritmen van een (complex) getal zijn, die onderling veelvoudigen van $2\pi i$ verschillen. Die 'meerwaardigheid van de logaritme', daar liep het op stuk.

De rekenmachine geeft een antwoord dat past bij de zogenaamde *hoofdwaarde* van de logaritme; dat is de waarde van de logaritme waarvan het imaginaire deel in het interval $(-\pi, \pi]$ ligt.

Bijvoorbeeld $\ln(i) = 1.570796i$, dat is inderdaad $i(\pi/2)$. Daarmee is i^i wel even gered, maar er geldt nu niet meer $4 \ln(i) = \ln(i^4)$, tenzij we $2\pi i = 0$ accepteren. Door 2π als een hoek op te vatten, waarbij een volle ronde ook de 0-hoek is, redden we ons hier weer iets langer. Maar het is raar om dit voor sommige getallen wel te doen en voor andere niet.

De ware uitweg is een stevige theorie op te bouwen voor *meerwaardige* functies zoals de logaritme (en ook de wortelfunctie!). Daarin wordt gewerkt met ingewikkelder objecten dan het complexe vlak: *Riemann*-oppervlakken. Die lijken voor gedeelten wel op het complexe vlak, maar hebben als het ware meerdere verdiepingen, die vaak vloeiend in elkaar over lopen.

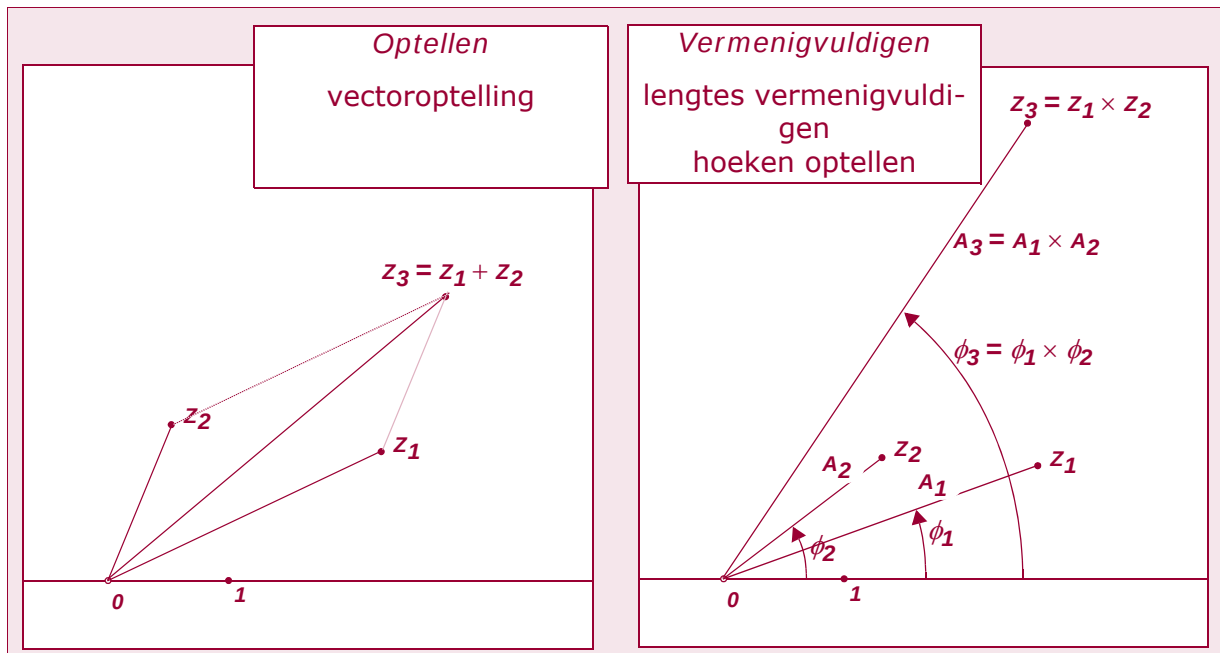
Bij dat 'vloeiend in elkaar over lopen', kun je bijvoorbeeld denken wat er gebeurt met een *door-gaand* rondjes draaiend punt op de eenheidscirkel. Het doet natuurlijk aan om het argument dan te laten oplopen, en niet steeds naar nul terug te laten springen. Dat argument, vermenigvuldigd met i , is juist de natuurlijke logaritme. Na een rondje bevind je je op een 'andere verdieping' van het Riemannoppervlak van de natuurlijke logaritme!

Beschouw je de hele rij mogelijke complexe getallen die door de e -macht steeds op één zelfde complex getal worden afgebeeld, als één *object*, dan kom je na het rondje wél op hetzelfde *object* terecht, namelijk weer op diezelfde hele rij. Door deze constructie is het springeffect verdwenen.

Ter geruststelling: bij uitwerking als $(1+2i) \cdot (3-4i)$ kun je de rekenmachine veilig gebruiken. Die doet dat volgens de algebraïsche regels van dit hoofdstuk, inclusief $i^2 = -1$. Echt wel safe.

4.22 Samenvatting rekenen met complexe getallen

Definities



Optellen en vermenigvuldigen in de cartesische notatie

$Z_1 = a + bi$ $Z_2 = c + di$	
$Z_1 + Z_2 = (a + c) + (b + d)i$	$Z_1 \times Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$

Optellen en vermenigvuldigen in de e-notatie

$Z_1 = A \cdot e^{i\alpha}$ $Z_2 = B \cdot e^{i\beta}$	
<i>Moeizaam!</i> In de praktijk zul je meestal alleen optellen via cartesische coördinaten en dan omzetten volgens de regels op bladzijde 68.	$Z_1 \times Z_2 = A \cdot B \cdot e^{i(\alpha + \beta)}$

4.23 Samenvatting en overzicht van formules

Aanleiding complexe getallen in dit boek

De overdracht van een schakeling onder wisselspanning bestond uit twee gegevens: de verhouding van de amplituden van in- en uitgangsspanning en het faseverschil tussen in- en uitgangsspanning. We vatten zo'n koppel op als één object, een complex getal.

Wat zijn de complexe getallen en het complexe vlak?

De *complexe getallen* zijn de punten van het gewone coördinatenvlak, waaraan een optelling- en vermenigvuldigingsstructuur is toegevoegd.

Het product van twee complexe getallen A en B is getal Z waarvan de afstand tot O het product is van de lengtes OA en OB en waarvan de hoek van OZ met de positieve x -as de som is van de hoeken van OA en OB met de positieve x -as. Dit sluit direct aan bij de introductie van de complexe getallen vanuit overdracht bij schakelingen met wisselspanningsinput.

De som van twee complexe getallen A en B is bepaald door de vectorsom van de vectoren $\vec{OA}$ en $\vec{OB}$ vanuit de oorsprong O .

Het vlak met deze structuur heet *het complexe vlak*.

De gewone (reële) getallen zijn deel van het complexe vlak; ze vormen de reële as.

Nader toelichting en figuren in paragraaf 4.4, bladzijde 55.

Absolute waarde, argument en geconjugeerde

De absolute waarde van een complex getal is de afstand van het getal tot O ; de absolute waarde is dus zelf een *reël getal*.

De geconjugeerde van een complex getal is het spiegelbeeld van het getal in de lijn van de reële getallen, de zogenaamde reële as. De geconjugeerde is dus zelf ook een *complex getal*.

Een samenvatting van notaties en eigenschappen staat op bladzijde 69.

Twee voorstellingen in twee coördinatenstelsels

Complexe getallen kunnen worden beschreven met poolcoördinaten of met cartesische coördinaten.

Bij poolcoördinaten wordt de afstand tot O en de hoek van de lijn naar O met de positieve x -as aangegeven.

De cartesische coördinaten zijn de bekende rechthoekige.

De samenhang tussen beide is besproken in paragraaf 4.13, bladzijde 68. De belangrijkste bewerkingen, optellen en vermenigvuldigen, zijn in relatie met de twee voorstellingen nog eens in paragraaf 4.22, bladzijde 79, samengevat.

Het getal i

Het getal i is het bijzondere complexe getal met absolute waarde 1 en argument $\pi/2$.

Het kwadraat van i is -1 . Eigenschappen van i staan op bladzijde 63.

Reële as, imaginaire as, reële en imaginaire deel van een getal

Deze begrippen staan bij elkaar op bladzijde 67.

sinus, cosinus, e -notatie

De samenvatting hiervan staat op bladzijde 75.

4.24 Samenhang, terugblik, vooruitblik

In dit hoofdstuk begonnen we met een nogal kunstmatige constructie: een complexe getal was een samenstelling van een lengte en een richting; daarbij sloten we aan bij de begrippen versterking en faseverschuiving uit het vorige hoofdstuk. Maar onze nieuwe objecten bleken al gauw een zelfstandig systeem te vormen, dat ruimer is dan het gewone systeem van de reële getallen, maar waarin wel alle algebra van de gewone bewerkingen blijft werken.

Dat is het systeem van de complexe getallen.

Bijzonder is dat we veel meer vergelijkingen kunnen oplossen dan voorheen, gewoon omdat we méér getallen hebben.

We merkten dat als we een speciaal getal, namelijk een wortel van -1 , een speciale rol en naam geven, namelijk i , dat we dan alle complexe getallen, behalve in poolcoördinaten ook in de zogenaamde cartesische vorm $a + bi$ kunnen gebruiken, waarbij a en b gewone reële getallen zijn.

De cirkelbewegingen uit hoofdstuk 2 keerden terug, nu als complexe getallen van de vorm

$$R \cdot (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

Daarin zijn de cartesische vorm en de draaiing beide zichtbaar.

Omdat werken met deze getallen, met name het deel $\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$, heel erg lijkt op het werken met e-machten, noteren we deze getallen ook met een speciale notatie. Zo:

$$R \cdot e^{i\omega t}$$

Hiermee kunnen we goed verder met waar we eind hoofdstuk 3 stopten.

In paragraaf 4.14 verkenden we bovendien nog de samenhang tussen het getal i en de loodrechte stand van twee vectoren. Ook dat keert uiteraard straks terug; te verwachten, want in hoofdstuk 3 leerden we al dat spanningen die een fase verschil van $\pi/2$ hebben als onderling loodrechte vectoren kunnen worden opgevat.

Met de complexe e-macht en de samenhang van i en loodrechte stand, gaan we nu opnieuw rekenen aan wisselstroomschakelingen, en ook aan wat ingewikkelder schakelingen.

Al onze rekenregels, ook die over absolute waarde en geconjugeerden, zullen daarbij gaan functioneren.

Hoofdstuk 5. Complexe stromen en spanningen gebruiken

Radio Veronica draaide op 29 februari 1972 20 uur lang platen van The Beatles. Diskjockey Rob Out (zittend) en technicus Adje Bouman tonen een deel van de platencollectie. Twee jaar later komt aan de periode van Radio Veronica als zeezender een einde als de *anti-piratenwet* van kracht wordt. (ANP)

(De Volkskrant



Onderwerpen in dit hoofdstuk

- Wisselstroom en -spanning als complexe grootheden
- Complexe impedanties en complexe overdracht
- Het RL -netwerk
- Netwerk met condensator en spoelen
- Resonantie

Radio Veronica draaide op 29 februari 1972 20 uur lang platen van The Beatles. Disjockey Rob Out (zittend) en technicus Adje Bouman tonen een deel van de platencollectie. Twee jaar later komt aan de periode van Radio Veronica als zeezender een einde als de zogenaamde *anti-piratenwet* van kracht wordt. (ANP)

Inleiding op dit hoofdstuk

In dit hoofdstuk kijken we eerst naar de eigenschappen van een netwerk waarin een ideale spoel is opgenomen. We stellen ons weer dezelfde vragen als in het hoofdstuk over de condensator en het RC -netwerk, maar er komt nog een extra vraag bij.

Als eerste zoeken we een antwoord op de vraag: Wat zouden we kunnen verstaan onder de wisselspanningsweerstand van een spoel en hoe kunnen we met die weerstand rekenen in een netwerk waarin een spoel is opgenomen? Een belangrijke toepassing is de radiozender.

De tweede vraag die we willen beantwoorden is: Welke functie(s) kunnen wisselstroomnetwerken vervullen, waarin een spoel is opgenomen? Een belangrijke toepassing is de radiozender.

De extra derde vraag is:

Wat is de meerwaarde van het gebruik van complexe getallen bij het rekenen aan netwerken met weerstanden, spoelen en condensatoren? Is dat niet alleen maar nodeloos ingewikkeld?

5.1 Wisselstroom en -spanning als complexe grootheden

Eindelijk hebben we nu genoeg wiskunde in onze bagage om het rekenen aan netwerken met daarin weerstanden, spoelen en condensatoren makkelijker te maken.

In het vorige hoofdstuk zagen we dat je een roterend punt $P(t)$ heel handig kunt schrijven met complexe getallen. Bij hoeksnelheid ω en straal 1 gebruiken we daarvoor formule 4-12:

$$P(t) = E(\omega t) = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$$

In hoofdstuk 3 zagen we dat we een wisselspanning ook handig kunnen voorstellen als een roterend 'punt', bijvoorbeeld in figuur 3-4.

Het ligt dus voor de hand om ook een wisselspanning te schrijven met complexe getallen¹:

$$U(t) = U_0(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

formule 5-1

En op dezelfde manier kun je ook een wisselstroom schrijven als

$$I(t) = I_0(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

formule 5-2

Vaak wordt gezegd dat de 'echte' spanning/stroom gelijk is aan het reële deel van de complexe spanning/stroom. Je zult in de volgende paragrafen zien dat je dit eigenlijk nooit nodig hebt!

Meestal zullen we niet de notatie uit formules 5-1 en 5-2 gebruiken, maar de volgende (die daaraan gelijkwaardig is, zie formule 4-19):

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

$$I(t) = I_0 \cdot e^{i\omega t}$$

formule 5-3

In bovenstaande formules is aangenomen dat de fase van spanning en stroom nul zijn. Als dat niet zo is, worden deze formules:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i(\omega t + \phi)}$$

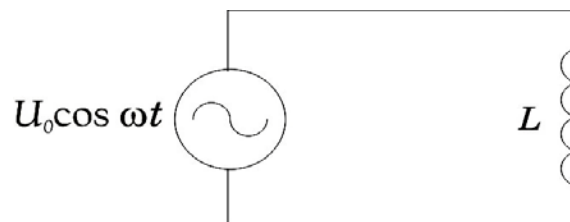
$$I(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega t + \phi)}$$

formule 5-4

De bewering is nu dat het rekenwerk aan een netwerk eenvoudiger wordt als je spanningen en stromen niet schrijft als een sinus- of cosinusfunctie, maar als complexe e-machten. Laten we de proef op de som nemen en gaan rekenen aan netwerken met een spoel erin.

5.2 Wisselstroom door een spoel

Als je op een spoel een sinusvormige wisselspanning zet, zal er een sinusvormige stroom gaan lopen.



figuur 5-1

Het verband tussen stroom en spanning wordt gegeven door vergelijking 1-9:

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

formule 5-5

¹ Het is natuurlijk niet zo dat er echt iets verandert aan de stroom en spanning door ze te schrijven als complexe getallen. Je doet dit alleen als een soort 'rekentruc'.

We weten dat de stroom sinusvormig zal zijn met dezelfde frequentie als de spanning, dus we kunnen hem als volgt schrijven als *complexe* stroom:

$$I_L = I_0 e^{i\omega t} \quad \text{formule 5-6}$$

We vinden nu de spanning over de spoel door dit te differentiëren en vervolgens te vermenigvuldigen met L , zoals voorgeschreven in vergelijking 1-9.

We hebben in hoofdstuk 4, formule 4-18, gezien dat je de complexe e-macht $e^{i\omega t}$ 'gewoon' mag differentiëren!

Opgave 5.1 Complexe spanning over een spoel

Laat zien dat:

$$U_L = i\omega L \cdot I_0 e^{i\omega t} = i\omega L \cdot I_L \quad \text{formule 5-7}$$

Hoe moet je dit nu interpreteren? Je kunt formule 5-7 als volgt uitschrijven:

$$U_L = (i\omega L I_0) \cdot e^{i\omega t} \quad \text{formule 5-8}$$

Het lijkt nu net alsof de amplitude van de spanning $(i\omega L I_0)$ ook een complexe grootte is! Maar je kunt de formule handig omschrijven, en dan blijkt dat die i in formule 5-8 een hele andere betekenis heeft!

Opgave 5.2 Spanning en stroom bij een spoel

In hoofdstuk hebben we gevonden dat $i = e^{i\pi/2}$; i is namelijk het complexe getal met absolute waarde 1 en argument $\pi/2$. Zie ook opgave 4.66. Dat gaan we nu gebruiken.

- Laat zien dat de stroom door de spoel cosinusvormig is en de spanning sinusvormig.
- Laat zien dat je formule 5-8 ook kunt schrijven als $U_L = \omega L e^{i(\omega t + \pi/2)}$.
- Bij een condensator liep de stroom 90° voor op de spanning. Hoe is dit bij de spoel?

5.3 Complexe impedanties

De complexe impedantie van de spoel

Bij de behandeling van de spoel hebben we de impedantie gedefinieerd als de verhouding tussen de spanning en de stroom.

We doen dit nu ook voor de spoel, maar we gebruiken nu de complexe stroom en spanning. Het gevolg is dat de impedantie ook een complexe grootte wordt!

Opgave 5.3 De complexe spanning van de spoel

Bereken de complexe impedantie Z_L van de spoel. Gebruik daarvoor formule 5-7.

Als het goed is, heb je de volgende belangrijke formule gevonden:

$$Z_L = i\omega L \quad \text{formule 5-9}$$

De complexe impedantie van de condensator en de weerstand

Opgave 5.4 De complexe impedantie van de condensator

- Laat zien dat de complexe impedantie van de condensator Z_C gelijk is aan

$$Z_C = \frac{1}{i\omega C} \quad \text{formule 5-10}$$

- b. Laat zien dat de complexe impedantie Z_R van de weerstand gelijk is aan de 'gewone' weerstand R :

$$Z_R = R$$

formule 5-11

De 'complexe wet van Ohm'

We kennen de wet van Ohm voor gelijkstroomschakelingen die opgebouwd zijn met weerstanden:

$$U = I \cdot R$$

Een soortgelijke wet kunnen we nu opschrijven voor wisselstroomschakelingen die opgebouwd zijn met weerstanden, spoelen en condensatoren:

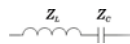
$$U = I \cdot Z$$

formule 5-12

In deze 'complexe wet van Ohm' neemt de impedantie de plaats in van de weerstand in de 'gewone' wet van Ohm. Bedenk wel dat in formule 5-12 U en I sinusvormige wisselspanningen en stromen zijn! In de volgende paragraaf zie je hoe je deze wet kunt gebruiken.

Impedanties in serie en parallel geschakeld

Aan het einde van hoofdstuk 1 heb je een aantal opgaven gemaakt waarbij je steeds de formules nodig had voor in serie en/of parallel geschakelde *weerstand*en. In deze paragraaf wordt aangetoond dat soortgelijke formules ook gelden voor in serie en/of parallel geschakelde *impedantie*en. In figuur 5-2 zie je van links naar rechts twee in serie geschakelde impedanties, twee parallel geschakelde impedanties en een combinatie van drie impedanties.



figuur 5-2

Heel algemeen kun je twee in serie geschakelde impedanties als volgt voorstellen.



figuur 5-3

De seriegeschakelde impedanties Z_1 en Z_2 zijn equivalent met één impedantie Z_s als de stroom I erdoor gelijk is als je er dezelfde spanning U_{AB} over zet. Let wel: alle stromen, spanningen en impedanties zijn complexe grootheden!

In de linkertekening geldt:

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = I \cdot Z_1 + I \cdot Z_2 = I \cdot (Z_1 + Z_2)$$

In de rechttertekening geldt:

$$U_{AB} = I \cdot Z_s$$

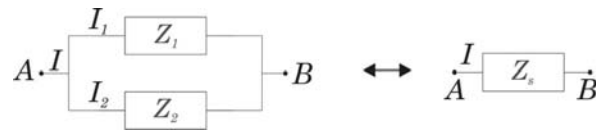
Hieruit volgt dus:

$$Z_s = Z_1 + Z_2$$

formule 5-13

Dit geldt voor twee in serie geschakelde impedanties. Het is heel simpel te bewijzen dat een soortgelijke wet ook geldt als je meer dan twee impedanties in serie schakelt.

In onderstaande schakeling zijn twee impedanties parallel geschakeld.



figuur 5-4

In de schakeling links in de figuur geldt

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= I \\ U_{AB} &= U_{Z_1} = U_{Z_2} \end{aligned}$$

formule 5-14

Opgave 5.5 Parallel geschakelde impedanties

a. Laat zien dat voor twee parallel geschakelde impedanties geldt

$$\frac{1}{Z_s} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

formule 5-15

b. Schrijf de vergelijking op voor drie parallel geschakelde impedanties.

Een voorbeeld:

Voor de middelste van de drie schakelingen van figuur 5-2 geldt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_s} &= \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} = \frac{1}{i\omega L} + i\omega C = i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \\ Z_s &= \frac{1}{i\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)} = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \end{aligned}$$

formule 5-16

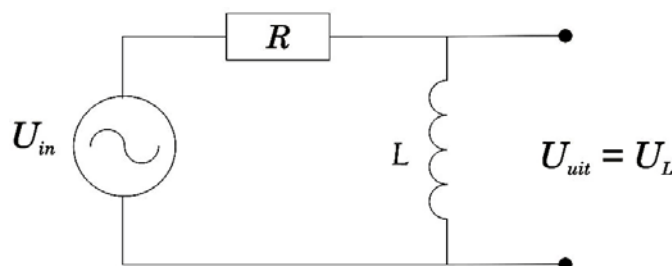
Opgave 5.6 Rekenen met complexe impedanties

a. Zorg dat je bovenstaande berekening goed begrijpt.

b. Bereken de complexe impedanties van de andere twee schakelingen in figuur 5-2.

Een simpele schakeling met een spoel

We beschouwen het netwerk van figuur 5-5, een RL-schakeling.



figuur 5-5

Een soortgelijk netwerk, maar dan met een condensator (zie figuur 3-3) hebben we eerder door-gerekend. Maar nu gaan we het doen met onze nieuwe complexe wet van Ohm en complexe im-pedanties!

De stroom door de weerstand en die door de spoel zijn gelijk, we noemen die stroom I . En de som van de spanning over de weerstand en de spoel is gelijk aan de ingangsspanning.

De som van de spanningen over de spoel en de weerstand moet gelijk zijn aan de ingangsspanning. Dus kunnen we opschrijven (we gebruiken hier formules 5-9 t/m 5-13):

$$U_{in} = I \cdot Z_R + I \cdot Z_L = I \cdot (R + i\omega L) \quad \text{formule 5-17}$$

De uitgangsspanning is de spanning over de spoel. Dus:

$$U_{uit} = I \cdot Z_L = I \cdot i\omega L \quad \text{formule 5-18}$$

5.4 De complexe overdracht

Aan het einde van hoofdstuk 3 zagen we dat het niet goed mogelijk is de overdracht te definiëren als het quotiënt van uit- en ingangsspanning. Daarom definieerden we de overdracht als het getallenpaar (G, ϕ) . In hoofdstuk 4 zag je dat je dat probleem kunt oplossen door dit getallenpaar te schrijven als een complexe e-macht. Je kunt het ook als volgt formuleren:

Als je spanningen en stromen schrijft als complexe e-machten is het heel goed mogelijk de overdracht te definiëren als U_{uit}/U_{in} . De overdracht is dan wel een complexe functie van ω !

We schrijven hem als $H(\omega)$.

Uit formules 5-17 en 5-18 volgt de (complexe) overdracht van het RL -netwerk van figuur 5-5:

$$H(\omega) = \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} \quad \text{formule 5-19}$$

Opgave 5.7 De complexe overdracht van twee andere netwerken

- Bereken de overdracht van het RC -netwerk van figuur 3-3.
- Bereken de overdracht van het netwerk dat je krijgt als je in figuur 5-5 R en L verwisselt.

De betekenis van de overdracht

We hebben in de vorige paragraaf een fraaie formule gevonden voor de overdracht $H(\omega)$ van het RL -netwerk. Maar wat heb je daar nu aan?

Om te begrijpen wat de overdracht precies inhoudt, gaan we terug naar de definitie van de overdracht:

De overdracht van een netwerk is het quotiënt van de uitgangsspanning en de ingangsspanning.

Laten we aannemen dat de ingangsspanning een sinusvormige spanning is met hoekfrequentie ω en een willekeurige fase ϕ_i . Hier wordt natuurlijk de *complexe* spanning bedoeld, die dus als volgt geschreven kan worden:

$$U_{in} = U_{0i} \cdot e^{i(\omega t + \phi_i)}$$

We weten intussen dat de uitgangsspanning weer een sinusvormig signaal is met dezelfde frequentie maar met een andere amplitude en fase. Dit kan dus geschreven worden als:

$$U_{uit} = U_{0u} \cdot e^{i(\omega t + \phi_u)}$$

De (complexe) overdracht $H(\omega)$ is het quotiënt van uit- en ingangsspanning:

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{U_{uit}}{U_{in}} = \frac{U_{0u} e^{i(\omega t + \phi_u)}}{U_{0i} e^{i(\omega t + \phi_i)}} = \frac{U_{0u} e^{i\omega t} e^{i\phi_u}}{U_{0i} e^{i\omega t} e^{i\phi_i}} \\ &= \frac{U_{0u}}{U_{0i}} \frac{e^{i\phi_u}}{e^{i\phi_i}} = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} e^{i(\phi_u - \phi_i)} = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} e^{i\phi} \end{aligned} \quad \text{formule 5-20}$$

Hierin is $\phi = \phi_u - \phi_i$.

Als je formule 5-20 vergelijkt met formule 3-18, zie je dat het nu wél mogelijk is om in de formule voor de overdracht het faseverschil ϕ op te nemen. Dat komt omdat we complexe spanningen en stromen gebruiken! Bovendien is het probleem van het delen door nul verdwenen.

De versterking is de absolute waarde van de overdracht

In hoofdstuk hebben we ook gezien dat de absolute waarde van $e^{i\phi}$ gelijk is aan 1.

Het is nu heel eenvoudig in te zien dat de *absolute waarde* van de complexe overdracht gelijk is aan de verhouding van de *amplitudes* van uit- en ingangsspanning.

$$|H(\omega)| = \left| \frac{U_{0u}}{U_{0i}} e^{i\phi} \right| = \left| \frac{U_{0u}}{U_{0i}} \right| \cdot |e^{i\phi}| = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} \cdot 1 = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} \quad \text{formule 5-21}$$

Dit is dus hetzelfde als wat we de overdracht $G(\omega)$ noemden bij het RC-netwerk, toen we nog niet met complexe grootheden werkten.

Voortaan schrijven we niet meer $G(\omega)$ voor de versterking, maar $|H(\omega)|$.

Uit formule 5-20 kunnen we ook afleiden hoe ϕ berekend kan worden, dat is dus het faseverschil tussen uit- en ingangsspanning. Hiervoor schrijven we de formule uit:

$$H(\omega) = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} e^{i\phi} = \frac{U_{0u}}{U_{0i}} (\cos \phi + i \sin \phi)$$

Als we nu het imaginaire deel van $H(\omega)$ delen door het reële deel, krijgen we:

$$\frac{\text{Im } H(\omega)}{\text{Re } H(\omega)} = \frac{\frac{U_{0u}}{U_{0i}} \sin \phi}{\frac{U_{0u}}{U_{0i}} \cos \phi} = \frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi$$

Hieruit volgt dat we het faseverschil tussen uit- en ingangsspanning direct kunnen uitrekenen uit de complexe overdracht:

$$\phi = \arctan \left(\frac{\text{Im } H(\omega)}{\text{Re } H(\omega)} \right) \quad \text{formule 5-22}$$

In formule 5-21 en 5-22 is beknopt weergegeven waarom het zo nuttig is om netwerken door te rekenen met complexe grootheden:

In de complexe overdracht zie je in één vergelijking zowel wat het netwerk doet met de amplitude van een sinusvormig ingangssignaal maar ook wat er met de fase gebeurt.

Daarnaast wordt het rekenen aan netwerken veel simpeler door complexe getallen te gebruiken. (Maar misschien ben je het daarmee helemaal niet mee eens...)

5.5 De frequentiekarakteristiek van het RL -netwerk

Bij het rekenen aan het RC -netwerk vonden we de 'gewone', reële overdracht en die bleek belangrijk te zijn omdat een grafiek ervan als functie van de (hoek)frequentie, de frequentiekarakteristiek, getekend kon worden. Dat was de grafiek waarin je kon zien hoe de verhouding van de amplitudes van uit- en ingangsspanning zich gedraagt als functie van de (hoek)frequentie.

Het is nu niet meer moeilijk om uit te rekenen hoe de frequentiekarakteristiek van ons RL -netwerk er uitziet. We moeten daarvoor de absolute waarde uitrekenen van de overdracht formule 5-19.

Opgave 5.8 De amplitudekarakteristiek van de RL -kring

a. Toon aan dat de absolute waarde van de overdracht van hert RL -netwerk gelijk is aan:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}}$$

formule 5-23

b. Laat zien dat $|H(\omega)| = 1$ voor $\omega \gg R/L$

c. Laat zien dat $|H(\omega)| = 0$ voor $\omega = 0$.

d. Laat zien dat $|H(\omega)| = 1/\sqrt{2}$ voor $\omega = R/L$

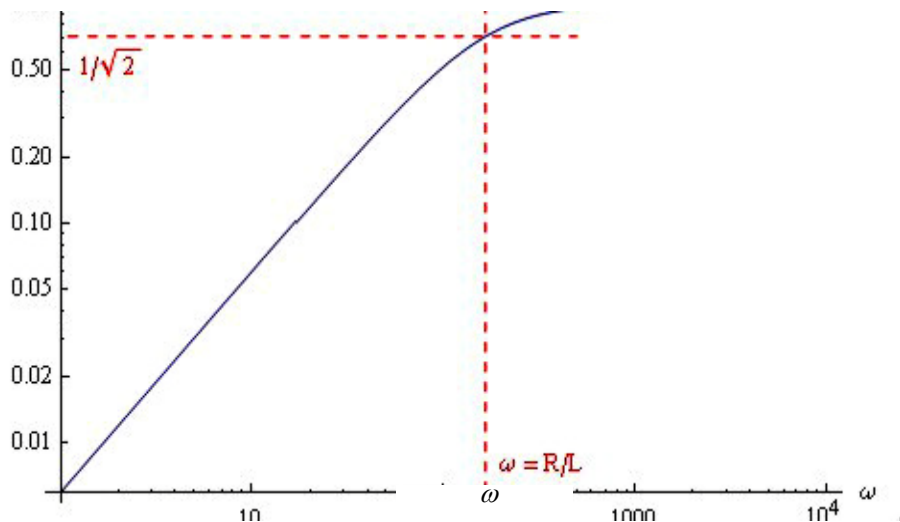
e. Laat zien dat $|H(\omega)| \approx (L/R) \cdot \omega$ voor $\omega \ll R/L$

Het is nu niet zo moeilijk meer om de frequentiekarakteristiek te schetsen of te tekenen.

Opgave 5.9 Een grafiek van de amplitude-overdracht

Maak een grafiek van $|H(\omega)|$ als functie van ω . Neem $R = 30 \text{ k}\Omega$ en $L = 180 \text{ H}$. Laat de ω -as lopen van 0 tot 5000 rad/s.

In onderstaande figuur zie je de frequentiekarakteristiek dubbellogaritmisch getekend.



figuur 5-6

Opgave 5.10 RC -netwerk en RL -netwerk vergeleken

a. Vergelijk deze grafiek met figuur 3-6. Of nog liever de grafiek die je gemaakt hebt met de rollen van R en C verwisseld.

b. Kun je een toepassing bedenken voor dit netwerk?

5.6 De fasekarakteristiek van het RL -netwerk

Als slot van dit hoofdstuk maken we ook nog de fasekarakteristiek van het RL -netwerk. Dat is een grafiek waarin het faseverschil tussen uit- en ingangsspanning uitgezet is tegen de (hoek)frequentie.

Dat faseverschil volgt uit formule 5-22. We moeten dus het imaginaire en reële deel van de overdracht in formule 5-19 uitrekenen. Dat lukt alleen als je er voor zorgt dat de noemer van de breuk in formule 5-19 niet meer complex is, maar reëel. Om dat te bereiken, vermenigvuldig je teller en noemer met de complex geconjugeerde van de noemer zoals al eerder gedaan is in hoofdstuk op bladzijde 66.

$$H(\omega) = \frac{i\omega L}{R + i\omega L} = \frac{i\omega L(R - i\omega L)}{(R + i\omega L)(R - i\omega L)} = \frac{\omega^2 L^2 + i\omega RL}{R^2 + (\omega L)^2}$$

Je ziet dat de noemer nu niet meer complex is.

Nu is het niet moeilijk meer om het reële en imaginaire deel van deze breuk op te schrijven:

$$H(\omega) = \frac{\omega^2 L^2 + i\omega RL}{R^2 + (\omega L)^2} = \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L)^2} + i \frac{\omega RL}{R^2 + (\omega L)^2}$$

formule 5-24

Daaruit leiden we af:

$$\text{Im } H(\omega) = \frac{\omega RL}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\text{Re } H(\omega) = \frac{\omega^2 L^2}{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\frac{\text{Im } H(\omega)}{\text{Re } H(\omega)} = \frac{R}{\omega L}$$

formule 5-25

Uiteindelijk vinden we dus de volgende simpele formule voor de faseoverdracht van het RL -filter:

$$\phi = \arctan \frac{R}{\omega L}$$

formule 5-26

Opgave 5.11 De fasekarakteristiek van het RL -netwerk

Maak een grafiek van het faseverschil ϕ tussen uit- en ingangsspanning als functie van ω . Gebruik dezelfde waarden voor R en L als in de amplitudekarakteristiek.

Over het vervolg

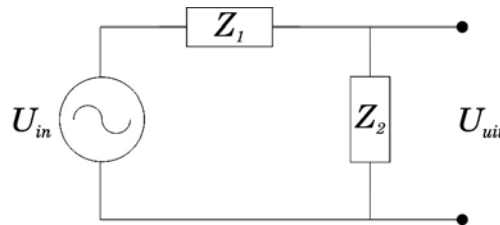
In het vervolg van dit hoofdstuk zullen we wat ingewikkelder netwerken bestuderen. Vooral netwerken die zowel spoelen als condensatoren bevatten kunnen heel nuttig zijn omdat ze zich niet alleen als hoog- of laagdoorlaatfilter kunnen gedragen, maar ook meer complex frequentieafhankelijk gedrag kunnen vertonen.

Het zal blijken dat we het type berekeningen dat we eerder gedaan hebben bij de spanningsdeler en bij ingewikkelder netwerken met weerstanden, moeiteloos kunnen voortzetten naar netwerken met zowel weerstanden als condensatoren als spoelen, als we van het begrip complexe impedanties gebruikmaken.

5.7 Een 'spanningsdeler' met impedanties

In paragraaf 1.6 van deze module, figuur 1-11, ben je de spanningsdeler tegengekomen. De overdracht van de spanningsdeler werd gegeven door formule 1-22.

De netwerken die we verder in dit hoofdstuk bestuderen, lijken heel erg op de spanningsdeler, alleen zijn de weerstanden vervangen door impedanties. Zo'n netwerk ziet er dan als volgt uit:



figuur 5-7

Heel algemeen kunnen zowel Z_1 als Z_2 een weerstand, spoel of condensator zijn, maar ook een netwerkje op zich van weerstanden, spoelen en/of condensatoren.

In de schakeling van figuur 5-7 zal door Z_1 en Z_2 een stroom gaan lopen volgens de 'complexe wet van Ohm' uit formule 5-12:

$$I = \frac{U_{in}}{Z_1 + Z_2}$$

Met dezelfde complexe wet van Ohm vinden we de uitgangsspanning, dat is immers de spanning over impedantie Z_2 :

$$U_{uit} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} U_{in}$$

De overdracht van dit netwerk is dus:

$$H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

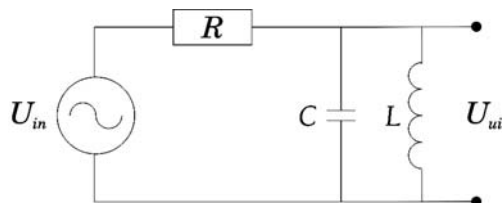
formule 5-27

Hoewel je niet alle mogelijke netwerken kunt tekenen als de 'complexe spanningsdeler' van figuur 5-7 is het heel vaak wel mogelijk. In ieder geval is het mogelijk voor alle netwerken die wij in deze module bestuderen.

In de volgende paragraaf wordt een voorbeeld uitgewerkt.

5.8 Een netwerk met condensator en spoel parallel geschakeld

In onderstaande figuur 5-8 zie je een netwerk waarin zowel een weerstand als een spoel en een condensator voorkomen.



figuur 5-8

Als je dit netwerk vergelijkt met dat van figuur 5-7, zie je dat in dit geval geldt:

$$\begin{aligned} Z_1 &= R \\ Z_2 &= Z_C // Z_L \end{aligned}$$

formule 5-28

Met afkorting $Z_C // Z_L$ wordt bedoeld de vervangende impedantie van de parallelgeschakelde Z_C en Z_L .

Opgave 5.12 Spoel en condensator parallel geschakeld

a. Toon aan dat:

$$Z_2 = Z_C // Z_L = \frac{i\omega L}{1 - \omega^2 LC} \quad \text{formule 5-29}$$

b. Gebruik nu formule 5-27 om aan te tonen dat de overdracht van dit netwerk gelijk is aan:

$$H(\omega) = \frac{i\omega L}{R(1 - \omega^2 LC) + i\omega L} = \frac{1}{1 - iR\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)} \quad \text{formule 5-30}$$

Om de amplitudekarakteristiek te kunnen tekenen, moeten we nu ook nog de absolute waarde van de overdracht uitrekenen. En om de faseoverdracht te weten te komen moet je formule 5-22 gebruiken, dus moeten ook het reële en imaginaire deel van de overdracht berekend worden; in paragraaf 5.6 is dat voor een RL -netwerk gedaan.

Opgave 5.13 De frequentiekarakteristiek van het netwerk

a. Toon aan dat de absolute waarde van de overdracht is:

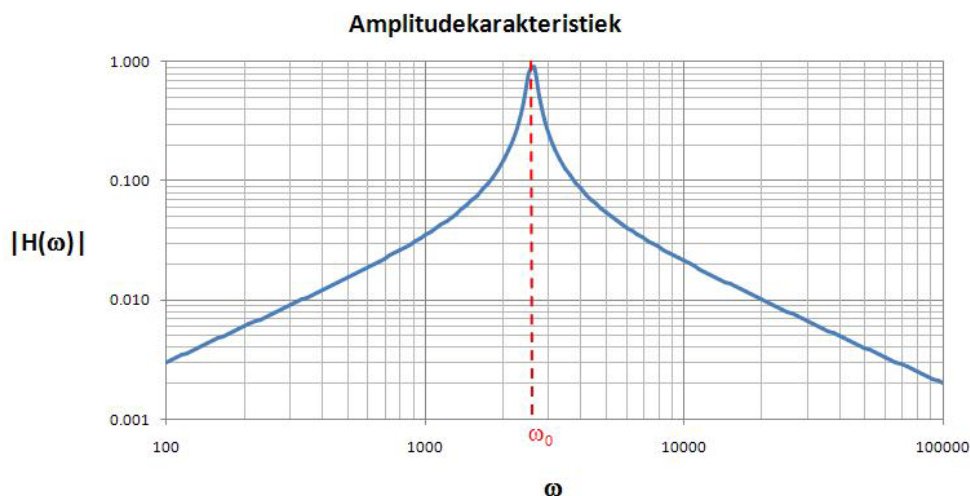
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + R^2 \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}} \quad \text{formule 5-31}$$

b. Toon aan dat voor het faseverschil ϕ tussen uit- en ingangsspanning geldt:

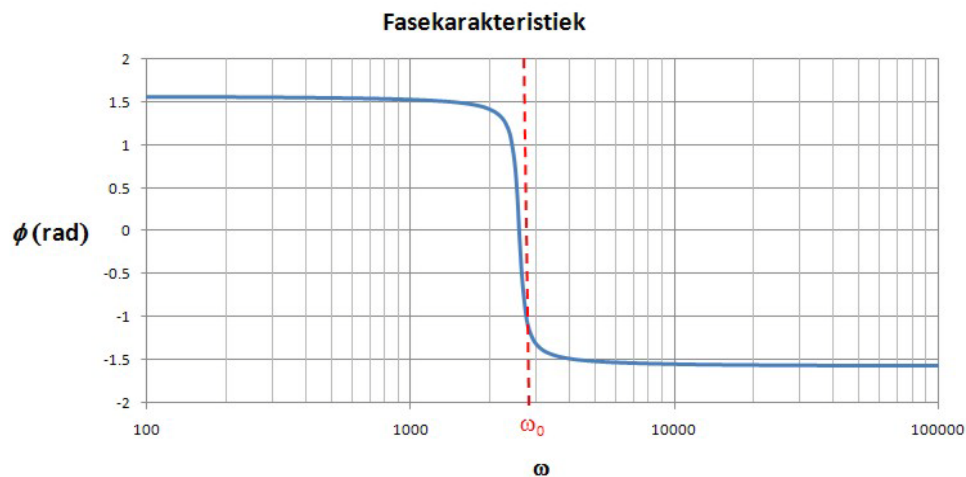
$$\phi = \arctan R \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \quad \text{formule 5-32}$$

c. Maak een tekening van de amplitudeoverdracht voor $R = 100 \Omega$, $L = 3 \text{ mH}$, $C = 50 \mu\text{F}$. Teken de grafiek voor $0 < \omega < 8000 \text{ rad/s}$.

Hieronder zie je de amplitude- en de fasekarakteristiek, de eerste dubbellogaritmisch uitgezet en de tweede enkellogaritmisch.



figuur 5-9



figuur 5-10

Een bijzondere frequentie

In figuur 5-9 zie je dat het *RCL*-netwerk van deze paragraaf een heel bijzondere eigenschap heeft. Er is eigenlijk maar één frequentie waarbij het netwerk een sinusvormig signaal helemaal doorlaat, bij alle andere frequenties wordt het signaal verzwakt. Zo'n netwerk zou je kunnen gebruiken om uit een samengesteld signaal, dat opgebouwd is uit een aantal sinusvormige signalen, één bepaalde frequentie te filteren. Zo'n filter heet een *banddoorlaatfilter*, **BDF**. In het Engels heet dit filter *bandpassfilter*, **BPF**.

Het is tamelijk eenvoudig in te zien welke frequentie wordt doorgelaten: de frequentie waar de scherpe piek zit in figuur 5-9; dat is dus bij die frequentie waarbij $|H(\omega)|$ maximaal is.

Het lijkt logisch om naar formule 5-31 te kijken om erachter te komen bij welke frequentie dat is, maar het is handiger om uit te gaan van wat in formule 5-30 staat:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - iR\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)}$$

De noemer van deze formule heeft de vorm $1 + i \cdot F$, waarin F een formuledeeltje is, dat alleen reële waarden aanneemt. De uitdrukking voor F is:

$$F = -R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) \quad \text{formule 5-33}$$

De absolute waarde van $1 + i \cdot F$ is gemakkelijk in F uit te drukken:

$$|1 + i \cdot F| = \sqrt{1 + F^2} \quad \text{formule 5-34}$$

De kleinste waarde daarvan is 1, die wordt bereikt als $F = 0$. Zoiets heb je in opgave 4.47 ook gezien!

Opgave 5.14 De bijzondere frequentie vinden

Toon nu met behulp van formule 5-33 aan dat $|H(\omega)|$ maximaal is voor een waarde van ω die gelijk is

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{formule 5-35}$$

Deze bijzondere frequentie wordt de *resonantiefrequentie* genoemd.

Opgave 5.15 De resonantiefrequentie is echt bijzonder

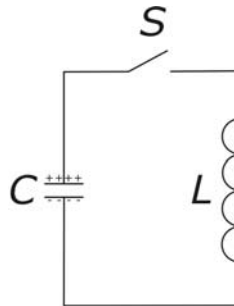
- Bereken de resonantiefrequentie voor de waarden van R , C en L die voor het tekenen van de grafieken zijn gebruikt en vergelijk de gevonden waarde met die in de tekening.
- Bereken de grootte van de amplitudeoverdracht (de versterking) bij de resonantiefrequentie.
- Bereken hoe groot het faseverschil is tussen uit- en ingangssignaal bij de resonantiefrequentie.
- Bereken de waarde van de impedantie van de parallelgeschakelde L en C bij de resonantiefrequentie.
- Bereken de grootte van de stroomsterkte door de weerstand bij de resonantiefrequentie.
- Bereken, weer bij de resonantiefrequentie, de grootte van de stroomsterkte in de spoel en die in de condensator. Hoe groot is de som van deze twee stroomsterktes samen? Klopt het dat deze som gelijk is aan de stroomsterkte in de weerstand, zoals te verwachten is?

Conclusie: *de resonantiefrequentie is echt een bijzondere frequentie!*

5.9 Resonantie

In de vorige paragraaf zagen we dat de schakeling van figuur 5-8 bij de resonantiefrequentie allerlei bijzondere kenmerken heeft. Het is dus niet zo gek om die bijzondere frequentie een aparte naam te geven. Maar waarom heet hij nu *resonantiefrequentie*? Je kent de term resonantie waarschijnlijk als een verschijnsel dat optreedt bij slingers en oscillatoren. Als je een slinger aandrijft met een bepaalde frequentie, zal het effect daarvan het grootst zijn als je dat doet met de frequentie die de slinger zelf heeft als hij zonder aandrijving slingert. Wat heeft dat te maken met het RCL -netwerk van figuur 5-8?

Om dat te begrijpen, kijken we naar de schakeling van figuur 5-11.



figuur 5-11

Op het tijdstip $t = 0$ wordt schakelaar S gesloten. Er zit dan al een lading op de condensator. Als S wordt gesloten, zal die lading door spoel L gaan stromen. Na enige tijd zit er geen lading meer op C , maar (in tegenstelling tot de situatie bij een RC -kring) het proces houdt dan niet op, de lading stroomt dóór, zodat na enige tijd er weer evenveel lading op C zit als op $t = 0$, maar nu omgekeerd: de positieve lading zit op de onderste plaat en de negatieve op de bovenste! Op dat moment gaat de lading de andere kant op stromen, totdat de beginsituatie weer is bereikt. Het tijdstip waarop dat gebeurt, noemen we T . Alles begint dan weer van voren af aan. In principe gaat dit dan eeuwig zo door. We hebben dus te maken met een periodiek proces, een *oscillatie* of *trilling*, met periode T . Het omgekeerde hiervan is de frequentie f_0 van de trilling. En f_0 vermenigvuldigd met 2π levert de hoekfrequentie ω_0 .

Het blijkt dat voor de LC -oscillator van figuur 5-11 een inmiddels bekende formule geldt:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Het is erg instructief om dit proces nog eens te bekijken, en daarbij te letten op de energieën die een rol spelen. Op het tijdstip $t = 0$ zit er lading op de condensator; er is dus een elektrisch veld tussen de condensatorplaten, en daarin zit een hoeveelheid *elektrische energie* opgesloten. Na het sluiten van S gaat er een stroom door de spoel lopen. Daardoor ontstaat er binnen de spoel een

magnetisch veld en wordt in de spoel een hoeveelheid *magnetische energie* opgeslagen. Op het tijdstip $t = \frac{1}{4}T$ zit er geen lading meer op C en is het magnetische veld binnen de spoel maximaal. Alle elektrische energie is dan omgezet in magnetische energie. Op het tijdstip $t = \frac{1}{2}T$ is alle magnetische energie weer omgezet in elektrische energie, enzovoort. Je kunt dit heel goed vergelijken met het voortdurend omzetten van potentiële in kinetische energie en omgekeerd bij een schommel.

Opgave 5.16 Energieomzetting bij een schommel

a. Beschrijf hoe bij een schommel binnen één periode T potentiële energie wordt omgezet in kinetische en omgekeerd.

b. Waarom gaat dit proces bij een schommel niet eeuwig door?

Bij de 'LC-schommel' gaat het proces ook niet eeuwig door. Dat komt omdat er tijdens het proces energie verloren gaat. Dat gebeurt niet in C en/of L ! In beide componenten wordt wel energie opgeslagen, maar niet gedissipeerd. Dit geldt echter alleen voor *ideale* componenten. En met name de spoel is nooit ideaal, omdat hij ook nog een *ohmse weerstand* R heeft. En in een weerstand wordt wel elektrische energie gedissipeerd, die wordt omgezet in warmte.

Als je de oscillatie in stand wilt houden zul je hem, net als bij een schommel, moeten aandrijven. En, net als bij een mechanische schommel, gebeurt dat alleen effectief als je het doet met de eigen frequentie van de LC-oscillator, de *resonantiefrequentie* ω_0 . En hoe doe je dat dan? Door de schakeling van figuur 5-8 te gebruiken!

Een toepassing

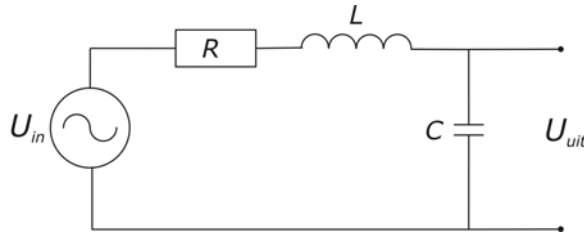
Een belangrijke toepassing van de LC-oscillator is de radiozender. Een radiozender zendt via een antenne een sinusvormige draaggolf uit. De frequentie van die draaggolf is de resonantiefrequentie van de LC-kring. De informatie die door de zender wordt uitgezonden (muziek, spraak), wordt op de draaggolf gezet door deze te *moduleren*. Wat dit precies is en hoe het gebeurt, valt buiten het bestek van deze module.

Aan de kant van de ontvanger, de radio, wordt de draaggolf opgepikt door een antenne. De gewenste draaggolf (de gewenste zender dus) wordt uit alle opgevangen draaggolven geselecteerd door precies zo'n LC-oscillator als in de zender gebruikt werd. De oscillator wordt ook wel een afgestemde kring genoemd. Door niet een vaste condensator te gebruiken, maar een variabele, kan de gewenste zender worden ingesteld.

Een andere toepassing vind je in de antidiestallabels die er voor zorgen dat een alarm afgaat als zo'n label door een detectiepoortje gaat. In dat label zit meestal een afgestemde kring bestaande uit een L en een C , net zoals in figuur 5-11. Het detectiepoortje zendt een golf uit met de frequentie van de afgestemde kring in de labels. Als een label die golf opvangt wordt er een beetje energie afgenomen van de uitgezonden golf. Het poortje detecteert dit en geeft een alarm.

5.10 Het laatste netwerk

In onderstaande figuur zie je het laatste netwerk dat we in deze module bekijken. Het is de bedoeling dat je het zelfstandig doorrekent aan de hand van de vragen die gesteld worden.



figuur 5-12

Opgave 5.17 Het laatste netwerk

- Bereken de overdracht van dit netwerk.
- Bereken de amplitude- en faseoverdracht.
- Maak een grafiek van de amplitudeoverdracht. Gebruik hierbij voor de L en C dezelfde waarden als in het vorige RCL -netwerk, en neem $R = 2\Omega$. Je mag een 'gewone grafiek maken, maar ook een dubbellogaritmische. Gebruik bijvoorbeeld Excel om de grafieken te maken.
- Maak een grafiek van de faseoverdracht, liefst een enkellogaritmische.
- Is er bij dit netwerk ook een 'bijzondere' resonantiefrequentie? Zo ja, welke is dat dan?

Toelichting bij het laatste netwerk

In het netwerk van figuur 5-8 waren de spoel en de condensator parallel geschakeld. De spanning over beide componenten was daarom gelijk. Het bleek dat bij resonantie de stroomsterkte door de condensator en de spoel gelijk, maar tegengesteld gericht was. In deze schakeling staan condensator en spoel in serie geschakeld, zodat de stroomsterkte door beide componenten gelijk is. Zoek naar een frequentie waarbij de spanning over de condensator gelijk is aan die over de spoel, maar tegengesteld gericht.

Tot slot: het antwoord op de hoofdstukvragen

Opgave 5.18 De hoofdstukvragen

- Vind je dat de drie vragen die aan het begin van dit hoofdstuk (op bladzijde 83) geformuleerd zijn nu bevredigend zijn beantwoord?
- Beantwoord de vragen door een samenvatting te maken van dit hoofdstuk. Zorg dat daarin zeker de beschrijving van de 'complexe spanningsdeler' voorkomt en hoe die lijkt op én afwijkt van de 'gewone spanningsdeler' van hoofdstuk 1.

Hoofdstuk 6. Complexe getallen gaan hun eigen gang

Onderwerpen in dit hoofdstuk

- Algebra en vergelijkingen
- De formule van De Moivre (1707)
- Functies en afbeeldingen
- De hoofdstelling van de algebra
- De complexe e-macht

Inleiding op dit hoofdstuk

In het vorige hoofdstuk is gebleken dat de complexe getallen daadwerkelijk kunnen helpen bij het rekenen aan elektrische netwerken.

Maar de complexe getallen vormen ook een wiskundig systeem op zich en kennen nog meer toepassingen. In dit hoofdstuk gaan we vooral in op de wiskundige kanten; vanuit drie onderdelen van de wiskunde die je al kent, maken we een verkenning richting complexe vlak.

Het eerste onderwerp: *algebra*. De complexe getallen bieden nieuwe mogelijkheden voor oplossen van vergelijkingen. We kunnen zonder meer alle vierkantsvergelijkingen aan. Maar er is meer: alle veeltermvergelijkingen, ook die van de derde, vierde en hogere graad blijken oplossingen te hebben. De beroemde *Hoofdstelling van de algebra* beweert dat, maar helaas: de stelling geeft niet aan hoe de oplossingen te vinden.

Het tweede onderwerp: *goniometrie*. Aan het eind van hoofdstuk 4 zagen we dat de complexe getallen op de eenheidscirkel een speciale rol hebben; in dit hoofdstuk gebruiken we de complexe getallen op de eenheidscirkel voor het vinden van bijzondere verbanden tussen goniometrische functies.

Het derde onderwerp: *grafieken en afbeeldingen*. Bij gewone functies zoals $1/x$ of x^2 of $x^3 - 2x$ geeft een grafiek overzicht hoe de functie zich op het geheel van de reële getallen gedraagt. Bij formules met een complexe variabele kunnen we moeilijk gewone grafieken tekenen en gebruiken we een iets ander middel. We bekijken wat het effect van een functie als $f(z) = z^2$ is op figuren in het complexe vlak, een driehoek, cirkel of lijn. Behouden ze hun vorm? Of is er een systematische vervorming aan de gang?

We bekijken vanuit dit gezichtspunt tot slot onze complexe *e-macht* opnieuw, nu niet alleen voor zuiver reële en zuiver imaginaire getallen, maar voor alle complexe getallen. Deze uitgebreide e-macht blijkt een functie te zijn met een *imaginaire periode* die het complexe vlak zo oprolt en transformeert dat het negatief oneindige in de nulpunt wordt opgesloten. Periodiek? Jawel, en er is bovendien een simpel uitziend, maar toch wel bijzonder verband met de sinus en de cosinus.

De uitgebreide e-macht en de hoofdstelling van de algebra laten zien dat de gewone algebra en de analyse van de reële getallen maar een schaduw zijn van wat het complexe vlak achter imaginaire sluiers verbergt.

Ben je daar eenmaal geweest, dan wil je nooit meer terug.

6.1 De wetten van de algebra

Je zult er niet aan twijfelen dat de volgende rekenregels voor complexe getallen gelden:

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1 \text{ en } Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1.$$

Anders bedenkt je maar even wat de definities ook al weer waren; dan zie je het wel.

In paragraaf 4.11 en heel hoofdstuk 5 rekenden we er onbekommerd op los, zonder te kijken of alle rekenstappen wel zouden werken in het complexe vlak. We namen klakkeloos aan dat de rekenregels van de reële getallen ook wel voor de complexe getallen zouden gelden.

Voor een bekende regel ('min keer min is plus') en de regel die je gebruikt voor haakjes wegwerken, volgt in deze paragraaf een onderbouwing. Tot slot volgen enkele opgaven, waar je kunt gebruiken dat een algebraïsch verband van reële getallen voortgezet kan worden naar complexe getallen.

De complexe vorm van 'min keer min is plus'

We willen aantonen dat voor alle complexe getallen Z_1 en Z_2 geldt:

$$-Z_1 \cdot -Z_2 = Z_1 \cdot Z_2 \quad \text{formule 6-1}$$

Wat $-Z$ betekent, is in opgave Opgave 4.26 gedefinieerd door te eisen dat $Z + (-Z) = 0$. Dat betekent eigenlijk: $-Z$ is het *tegengestelde* van Z in de zin van optelling; want een getal plus zijn tegengestelde moet 0 zijn.

In opgave Opgave 4.26 b is *aangehouden* dat het *omgekeerde* van Z in de zin van vermenigvuldigen met -1 , gelijk is aan het *tegengestelde* van Z . Je verwacht niet anders dan wat daar inderdaad bewezen werd:

$$(-1) \cdot Z = -Z$$

Omdat formule 6-1 over vermenigvuldigen gaat, gebruiken we deze relatie en verwisselen factoren; dat laatste is de rekenregel die 'de commutatieve eigenschap' heet: $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$. Dus zo:

$$-Z_1 \cdot -Z_2 = (-1) \cdot Z_1 \cdot (-1) \cdot Z_2 = (-1) \cdot (-1) \cdot Z_1 \cdot Z_2 = 1 \cdot Z_1 \cdot Z_2 = Z_1 \cdot Z_2$$

De distributieve wet. Ofwel: werken met haakjes werkt

Belangrijk is dat de regels voor haakjes wegwerken en zetten ook geldt. Voor drie complexe getallen geldt namelijk altijd:

$$U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$$

In de figuur hiernaast kun je dat volgen.

Je ziet daar $V + W$ als vierde punt van de parallellogram-uitbreiding van driehoek VOW .

Pas nu de draaivermenigvuldiging $U \cdot$ toe op het hele parallellogram, dus op V , W en $V+W$. Je krijgt weer een parallellogram.

Strikt genomen vind je zo $U \cdot (V + W)$.

Het kon anders: eerst keer V en W met U vermenigvuldigen. Je vindt dan $U \cdot V$ en $U \cdot W$. Na optellen vind je – strikt genomen – nu eigenlijk iets anders, namelijk $U \cdot V + U \cdot W$.

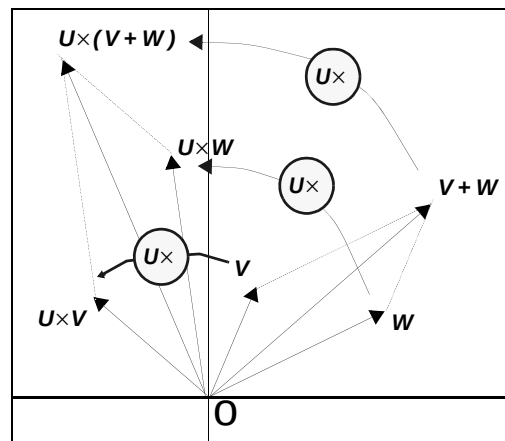
Maar in de figuur zijn de resultaten zeker hetzelfde, omdat een gedraaid parallellogram weer een parallellogram is. Vandaar dat ook algebraïsch geldt:

$$U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$$

De officiële naam hiervoor:

Vermenigvuldigen van complexe getallen is links-distributief over optellen.

Er zijn nog meer rekenwetten, die we allang gebruikt hebben, zonder het te merken. Zoals de regel



die de *associatieve wet van de vermenigvuldiging* heet:

$$(U \cdot V) \cdot W = U \cdot (V \cdot W)$$

Mocht je denken dat dit nietszeggende gebakken lucht is, controleer dan door met de hand (niet met de rekenmachine!) de vermenigvuldigingen binnen de haakjes eerst uit rekenen, dat inderdaad:

$$(12 \cdot 27) \cdot 39 = 12 \cdot (27 \cdot 39)$$

Je merkt dat je links en rechts volkomen verschillende vermenigvuldigingen moet uitvoeren. Het is bijna een wonder dat het altijd klopt!

Voor getallen die je kunt interpreteren als aantallen (knikkers, bonen, stippen) is de associativiteit van de vermenigvuldiging voor de hand liggend. Maar de complexe vermenigvuldiging kun je zo niet interpreteren!

Ter afsluiting en oefening

Je mag (ook al is het niet strikt bewezen) nu verder aannemen dat:

Alle algebraïsche wetten met +, −, · en / erin, die voor gewone getallen opgaan, gaan ook voor complexe getallen op.

Lees het goed: machtsverheffen met willekeurige complexe getallen als exponent staat er níet bij. In opgave 4.70 was je al gewaarschuwd. Machtsverheffen als herhaald vermenigvuldigen met hetzelfde getal is wel veilig.

Als jij *algebraïsch* kunt narekenen dat voor gewone getallen a geldt:

$$(1 + a + a^2) \cdot (1 - a) = 1 - a^3.$$

mag je er volgens het voorgaande van uitgaan dat ook voor complexe getallen z geldt:

$$(1 + z + z^2) \cdot (1 - z) = 1 - z^3.$$

De kern van de zaak is natuurlijk dat je bij het narekenen van $(1 + a + a^2) \cdot (1 - a) = 1 - a^3$ helemaal niet gebruikt dat het om reële getallen gaat, je gebruikt alleen de *vorm* van de rekenregels.

Opgave 6.1 Oefening een

a. Toon aan dat voor alle (ongelijk aan 0) complexe getallen U_1 en U_2 geldt:

$$\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} = \frac{U_1 + U_2}{U_1 \cdot U_2} \quad \text{en} \quad U_1^2 - U_2^2 = (U_1 + U_2) \cdot (U_1 - U_2)$$

Opgave 6.2 Oefening twee

Ken je de formule voor de som van een meetkundige rij nog? Die zegt bijvoorbeeld:

$$1 + 0,1 + 0,1^2 + 0,1^3 + \dots + 0,1^{25} = \frac{1 - 0,1^{26}}{1 - 0,1}$$

a. Geef ook een mooie compacte formule, met maar één hoge macht erin, voor:

$$1 + \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1+i}{2}\right)^{99} =$$

b. Het deel met de hoge macht van $\frac{1+i}{2}$ in het antwoord is in absolute waarde maar heel klein.

Zeker als je nog veel hogere machten in de optelling toevoegt. Waarom is dat zo?

c. Laat zien dat de rest van het antwoord gelijk aan $1 + i$ is.

In feite heb je nu aangetoond dat

$$1 + \left(\frac{1+i}{2}\right) + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^3 + \dots = 1 + i \quad .$$

6.2 Vergelijkingen oplossen

Net als bij gewone algebra, kun je bij complexe getallen vergelijkingen oplossen. Omdat de gewone algebraregels gelden, werken de op algebraïsch rekenen gebaseerde methoden wel goed. Die gebruiken we dan ook hier.

Maar er zijn afwijkingen! Methodes die gebaseerd zijn op inklemmen (of andere benaderingsmethodes) kun je niet zonder meer gebruiken en omdat het worteltrekken in de complexe getallen niet de beperkingen heeft van worteltrekken bij reële getallen kunnen we ook nieuwe winst bereiken.

In deze paragraaf zie je enkele voorbeelden, en je lost zelf enkele vergelijkingen op. Aan het einde van de paragraaf staat een voorbeeld hoe je het typisch NIET moet doen.

Vierkantsvergelijkingen

Voorbeeld 1: Vind complexe getallen z , met $z^2 - 6z + 10 = 0$

Plan: we gaan een oude methode toepassen: herleiden tot iets van de vorm $(z - p)^2 = q$ en dan de oplossingen vinden via $z - p = \pm\sqrt{q}$ en $z = p \pm \sqrt{q}$.

Voor de eerste stap moeten we $p = 3$ kiezen. Omdat $(z - 3)^2 = z^2 - 6z + 9$ komen we uit op

$$\begin{aligned}(z - 3)^2 + 1 &= 0 \\ (z - 3)^2 &= -1 \\ (z - 3) &= \pm i \\ z &= 3 + i \text{ of } z = 3 - i\end{aligned}$$

Het venijn zit in de stap waar de wortels uit een complex getal moeten worden bepaald. Dat was bij dit voorbeeld niet zo moeilijk, maar in het volgende voorbeeld bepalen we de wortels uit een 'lastiger' getal.

Voorbeeld 2: Vind complexe getallen z , met $z^2 = 6 + 5i$

We hebben eigenlijk al tweedemachtswortels bepaald in paragraaf 4.6; in poolnotatie. Nu bepalen we dus absolute waarde R en argument ϕ van $6 + 5i$ met de formules van paragraaf 4.13. We sturen aan op werken met de e-notatie, met:

$$R = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7,18024 \quad \text{en} \quad \phi = \tan^{-1}(5/6) \approx 0,694738 \quad \text{formule 6-2}$$

Om de wortels van $6 + 5i$ te bepalen, moet je nu de *wortel* uit R en het *gehalveerde* argument bepalen.

Maar pas op! Bij dat laatste heb je *twee* mogelijkheden. Er zijn namelijk *twee* hoeken in $[0, 2\pi)$ waarvan het dubbele juist de hoek ϕ is. Dit zijn dan oplossingen in de e-notatie:

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt{R} \cdot e^{i\phi/2} \approx 7,18024 \cdot e^{i0,347369} \\ z_2 &= \sqrt{R} \cdot e^{i(\phi/2 + \pi)} \approx 7,18024 \cdot e^{i3,488962}\end{aligned} \quad \text{formule 6-3}$$

Opgave 6.3 De benadering uitvoeren

- Benader z_1 met een rekenmachine in cartesische vorm. Je kunt gebruik maken van de al benaderde waarden voor R en ϕ in formule 6-2.
- Geef ook, *zonder enige nieuw cijferwerk uit te voeren*, de benaderde waarde voor z_2 .

Opgave 6.4 Slotopgaven vierkantsvergelijkingen

- Bereken de kwadraten van $1 + i$, $2 + i$ en $3 + i$, $1 + 2i$, $2 + 2i$ en $3 + 2i$.
(Dit bespaart je voor later veel rekenwerk; net zo is het handig als je 'herkent' dat 4, 9, 16, 25, 36 kwadraten zijn.)

- b. Los exact op door steeds de eerste twee termen tot een kwadraat aan te vullen (en het rechterlid aante passen ...)

$$z^2 - 4z + 1 - 4i = 0$$

$$z^2 - 2iz - 1 - 2i = 0$$

$$z^2 - (2+2i)z - 5 - 10i = 0$$

- c. Los exact op door de beroemde *abc*-formule toe te passen:

$$z^2 + 6z + 25 = 0$$

- d. Bepaal benaderde oplossingen in cartesische vorm van $z^2 - 2z + 13 = 0$ door het procédé van voorbeelden 1 en 2 hierboven te combineren.

Zuivere machtsvergelijkingen

Vergelijkingen met slechts één macht van z erin, zoals $z^2 = p + qi$ of $z^{13} = r + is$, los je allemaal op dezelfde manier op als bij het worteltrekken van zo-even.

Stap één: $r + is$ omzetten naar de vorm $R \cdot e^{i\phi}$ via de formules van paragraaf 4.13.

Stap twee: bepaal de 13-e machtswortel van R en zoek één hoek, waarvan het 13-voud juist ϕ is.

Stap drie: de andere wortels verschillen in argument onderling veelvoudigen van $2\pi/13$. Daarom zijn er ook precies 13 wortels:

$$\sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\phi}{13}}, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\phi+1 \cdot 2\pi}{13}}, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\phi+2 \cdot 2\pi}{13}}, \dots, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\phi+12 \cdot 2\pi}{13}} \quad \text{formule 6-4}$$

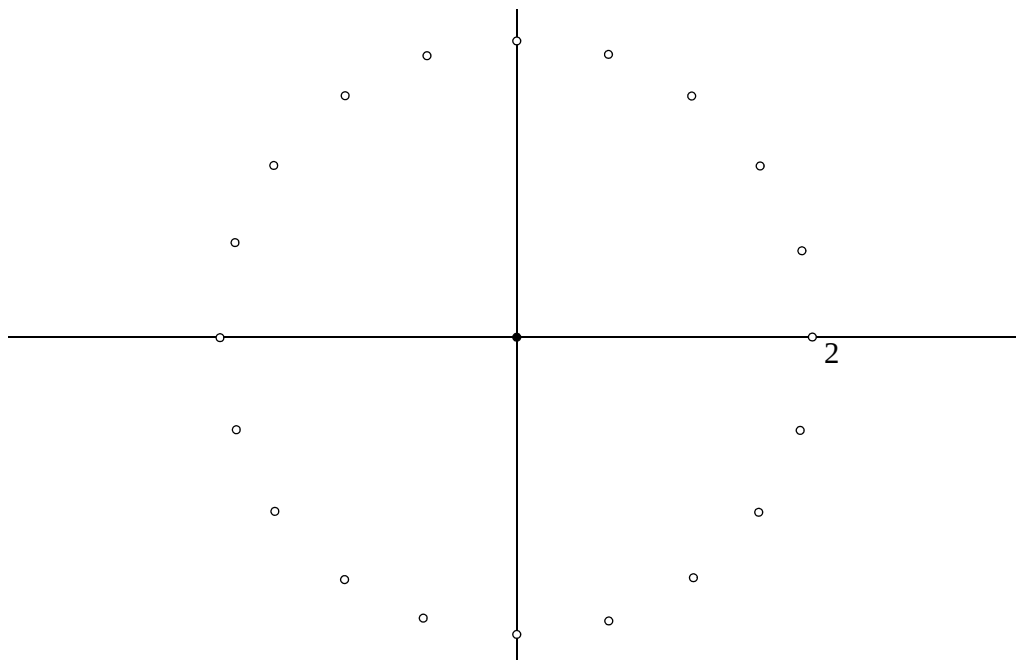
Opgave 6.5 Voorbeelden

- a. Los $z^3 = 1$ exact op via de gegeven methode en geef de drie oplossingen ook in exacte cartesische vorm.

- b. In deze figuur zijn op een cirkel met straal 2 de 20 hoekpunten van een regelmatige twintighoek uitgezet.

Markeer de vijf wortels van de vergelijking $z^5 = 32i$.

Schrijf er twee op de manier van in formule 6-4



- c. De overgebleven punten zijn oplossingen van drie andere vergelijkingen van graad 5. Welke vergelijkingen zijn dat?

Doe het niet zonder nadenken op de volgende manier:

Stel je voor, je wilt z oplossen uit:

$$z^2 - 2iz + 4 - 3i = 0$$

Je stelt nu $z = u + vi$, waarin dus u en v gewone reële getallen zijn.

Je vult in en werkt het geheel om naar de vorm $A + Bi$:

$$\begin{aligned} z^2 - 2iz + 4 - 3i &= (u + vi)^2 - 2i(u + vi) + 4 - 3i = \\ &= (u^2 + 2uv i - v^2) - 2i u + 2v + 4 - 3i = \\ &= (u^2 - v^2 + 2v + 4) + (2uv - 2u - 3)i \end{aligned}$$

Dat moet nul zijn. Daaruit volgt dat

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 + 2v + 4 &= 0 \\ 2uv - 2u - 3 &= 0 \end{aligned}$$

Dan moet je u en v uit dit stelsel van twee vergelijkingen oplossen.

.....

Zo wordt het alleen maar lastiger

In wezen komt dat hier doordat je je met eerste regel ' $stel z = u + vi$ ' al direct vastbijt in de cartesische aanpak, waardoor het worteltrekken, zoals dat in de pool-aanpak soepel verloopt, niet zo makkelijk meer lukt. Pas dus goed op, voor je opschrijft: ' $stel z = u + vi$ '.

Maar eerlijkheidshalve moet gezegd worden: soms werkt de cartesische coördinatenmethode wél.

Daarom is de wijzere regel: mocht je merken dat het rekenwerk aan je vergelijking uit lijkt te dijen als een olievlek, gooi dan je kladje niet weg, maar probeer wel ook eens iets anders!

Slotopmerkingen en vooruitblik

Veel van de oplossingen van vergelijkingen uit deze paragraaf bestaan niet in de wereld van de reële getallen, ook al hebben de vergelijkingen reële coëfficiënten, zoals bij $z^3 = 1$ en $z^2 - 2z + 13 = 0$. Veel vergelijkingen in de wereld van de reële getallen hebben geen reële oplossingen. In paragraaf 6.7 komt een stelling aan bod die zegt dat alle veeltermvergelijkingen met complexe coëfficiënten oplossingen hebben in het complexe vlak. Dat is dus een sterk punt voor het complexe vlak. Hoe die oplossingen te vinden zijn, dat is een andere zaak.

Om inzicht in die stelling te krijgen, hebben we iets meer kennis nodig over de machtsfuncties $w = z^n$; daaraan werken we in de volgende paragrafen, die echter ook zelfstandig van belang zijn.

6.3 De formule van De Moivre toepassen

De complexe e-macht hergebruiken

In paragraaf 4.17 is afgesproken wat we bedoelen met $e^{i\alpha}$ voor reële α :

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \text{formule 6-5}$$

en we weten dat we het linkerlid niet moeten zien als een *gewone* machtsverheffing, maar dat wel de rekenregels van het machtsverheffen kloppen. Zoals deze:

$$e^{in\alpha} = (e^{i\alpha})^n \quad \text{formule 6-6}$$

Nu passen we daarin links en rechts formule 6-5 op twee verschillende manieren toe:

- links vullen we $n\alpha$ in op de plaats van α ; zo ontstaat $\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$.
- rechts gebruiken we de n -de macht van het rechterlid; zo ontstaat $(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n$.

Resultaat:

$$\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^n \quad \text{formule 6-7}$$

Dit staat bekend als 'de formule van De Moivre', naar de wiskundige die in 1707 dit verband voor het eerst ontdekte. (De Moivre werd overigens veel bekender door zijn verkenningen in de waarschijnlijkheidsrekening en analytische meetkunde.)

Verdubbelingsformules

We kiezen nu eerst $n = 2$; het rechterlid wordt uitgewerkt volgens: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Er ontstaat dan:

$$\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 + 2i\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^2$$

Kijken we naar de reële en imaginaire delen links en rechts,

$$\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 + 2i\cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)^2$$

dan vinden we twee verbanden tegelijk, want reële en imaginaire delen zijn links en rechts gelijk.

De *verdubbelingsformules* voor sinus en cosinus verschijnen:

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2 \\ \sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha) \end{cases} \quad \text{formule 6-8}$$

Vertalen, en een klein beetje rekenen

Als je terugkijkt op de afleiding van de verdubbelingsformules, dan zie je dat er een uitgangspunt is gekozen, namelijk $e^{in\alpha} = (e^{i\alpha})^{2n}$. Dat werd vertaald naar een formule met sinus en cosinus. Voor $n = 2$:

$$\cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha) = (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))^2$$

Het eigenlijke rekenwerk in het verdere verhaal was gering, en bestond het uitwerken van

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Uitsplitsen naar het reële en imaginaire deel leverde het dubbel-resultaat 6-8.

Dit vertaal- en berekenpatroon gaan we enkele malen gebruiken.

Opgave 6.6 Drie- en achtvouden van de hoek

Gebruik de methode van zo-even om de cosinus en sinus van de 3- en 8-vouden van de hoek α uit te drukken in $\cos \alpha$ en $\sin \alpha$.

Deze al uitgewerkte verbanden kun je inzetten:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^8 = a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 + 8ab^7 + b^8$$

Nu kun je dit voltooien:

$$\begin{cases} \cos(3\alpha) = \dots \\ \sin(3\alpha) = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(8\alpha) = \dots \\ \sin(8\alpha) = \dots \end{cases}$$

Opgave 6.7 Voor $\cos(n\alpha)$ is $\sin(\alpha)$ niet echt nodig

In $\cos(2\alpha) = \cos(\alpha)^2 - \sin(\alpha)^2$ kunnen we $\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ gebruiken om tot een formule met alléén de cosinus te komen. Resultaat: $\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1$.

a. Druk ook $\cos(3\alpha)$ en $\cos(4\alpha)$ in alléén $\cos(\alpha)$ uit.

Op grond van de formules voor $\cos(n\alpha)$ voor enkele waarden van n vermoeden we:

- $\cos(n\alpha)$ kan voor alle natuurlijke getallen n uitgedrukt worden in een veelterm in $\cos(\alpha)$,
- de graad van die veelterm is n ,
- de coëfficiënten van die veelterm zijn gehele getallen,
- Bij even n komen alleen even machten van $\cos(\alpha)$ voor, bij oneven n alleen oneven machten.

b. Onderzoek of dit allemaal opgaat voor $n = 7$ en $n = 8$ en leg uit dat het ook voor andere waarden n zo moet zijn.

Opgave 6.8 De veeltermen van Tsjebysjev (lastige opgave!)

De veeltermen waar het in opgave 6.7 om gaat, heten de veeltermen van Tsjebysjev.

De veeltermen worden aangegeven met $T_n(x)$.

Bij $n = 2$ schrijven we nu

$$\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1 = T_2(\cos(\alpha)).$$

Daarbij is dus

$$T_2(x) = 2x^2 - 1.$$

a. Laat zien dat $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

Als n wat groter wordt, is het van de grond af aan berekenen van $T_n(x)$ een hele klus.

De volgende formule, een verband tussen drie opeenvolgende Tsjebysjev-veeltermen, verlicht het werkt:

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x)$$

b. Bewijs deze formule door een formule uit hoofdstuk 2 toe te passen op het rechterlid van

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = \cos((n+1)\alpha) + \cos((n-1)\alpha)$$

c. Bereken nu $T_4(x)$ en $T_5(x)$.

Tsjebysjev-veeltermen spelen een rol bij het benaderen van lastige functies door een zo goed mogelijk gekozen veelterm. Daar is Tsjebysjev (1821 - 1894) bekend mee geworden.

Hoeken optellen

Opgave 6.9 $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$ uitdrukken in $\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\beta)$ en $\sin(\beta)$

a. Neem nu het verband

$$e^{i(\alpha + \beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}$$

als uitgangspunt. Herschrijf de e-macht met $\sin$ en $\cos$, om via de uitwerking van $(a + b) \cdot (c + d)$ te komen tot:

$$\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = \dots\dots \\ \sin(\alpha + \beta) = \dots\dots \end{cases} \quad \text{formule 6-9}$$

b. Leid soortgelijke formules af (op dezelfde manier, of vanuit formule 6-9) voor:

$$\begin{cases} \cos(\alpha - \beta) = \dots\dots \\ \sin(\alpha - \beta) = \dots\dots \end{cases} \quad \text{formule 6-10}$$

c. Welke eerdere formules vind je terug als je kiest voor $\beta = \alpha$ en $\beta = 2\alpha$?

d. Formules 6-9 en 6-10 zijn vroeger door heel veel leerlingen blind uit het hoofd geleerd. Wat zou jij doen als ze je op een toets gevraagd gaan worden?

Opgave 6.10 Tot slot: formules voor $\tan(2\alpha)$ en $\tan(3\alpha)$

a. Leid met behulp van de verdubbelingsformules (formule 6-8) af hoe $\tan(2\alpha)$ samenhangt met $\tan(\alpha)$:

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - (\tan(\alpha))^2}$$

b. Leid ook een formule af voor $\tan(3\alpha)$.

6.4 De oplossingen van $z^n = 1$

De n-de eenheidswortels

Je hebt eerder, in opgave 6.5, de vergelijkingen van de vorm $z^n = p$ opgelost. De vergelijking $z^n = 1$ is een bijzonder geval; de oplossingen hebben enkele bijzondere eigenschappen.

De getallen waar het om gaat hebben een eigen naam: de n -de eenheidswortels.

In formule 6-4 (bladzijde 103) stonden de 13-e machtswortels uit $R \cdot e^{i\varphi}$:

$$\sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\varphi}{13}}, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\varphi + 1 \cdot 2\pi}{13}}, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2 \cdot 2\pi}{13}}, \dots, \sqrt[13]{R} \cdot e^{i\frac{\varphi + 12 \cdot 2\pi}{13}}$$

Daar $R = 1$ en $\varphi = 0$ te nemen, vind je de 13-e machts eenheidswortels in e-notatie:

$$e^{i0} = 1, e^{i\frac{1 \cdot 2\pi}{13}}, e^{i\frac{2 \cdot 2\pi}{13}}, \dots, e^{i\frac{12 \cdot 2\pi}{13}} \quad \text{formule 6-11}$$

Opgave 6.11 Ter oriëntatie

a. Wat zijn de 2-e eenheidswortels?

b. Schrijf twee van de zeven 7-e eenheidswortels op in e-notatie en cartesische notatie.

c. Elke complex getal met absolute waarde 1 en argument van de vorm $\varphi = \frac{p}{q} \cdot 2\pi$ met p en q

- geheel, is een eenheidswortel.
- Het getal i is een 4-eenheidswortel. Laat zien waarom.
 - Het getal i is ook een 8-ste eenheidswortel. Voor welke n is i een n -de eenheidswortel?
 - Zijn alle getallen op de eenheidscirkel eenheidswortels?
 - Leg uit waarom een 5-de machtswortel uit een 7e eenheidswortel zelf een 35-e eenheidswortel is.

n-de eenheidswortels als meetkundige rij

Opgave 6.12 De eenheidswortels als meetkundige rij

- Vul het ontbrekende deel van de formule in:

$$e^{i \cdot \frac{2k\pi}{n}} = (\dots\dots\dots)^k$$

formule 6-12

Het stukje tussen haakjes is zelf een n -de eenheidswortel!

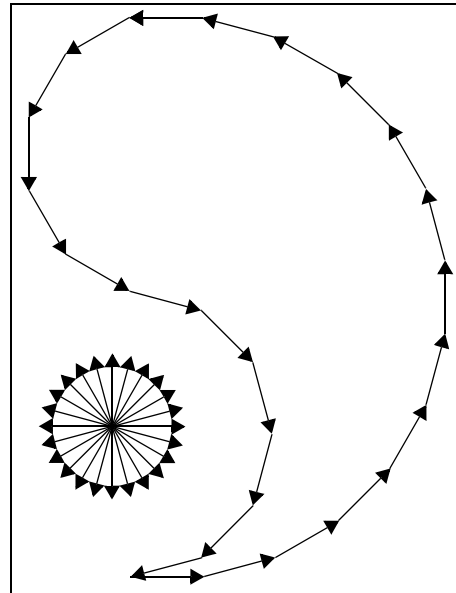
- Verklaar: de n -de eenheidswortels zijn opeenvolgende machten van één n -de eenheidswortel.
- Toon aan, bijvoorbeeld door de somformule voor de meetkundige rij te gebruiken (zie opgave 6.2), dat de n -de eenheidswortels samen gelijk aan 0 zijn.

De ligging op de eenheidscirkel

De 4-e eenheidswortels: $1, i, -1, -i$ vormen een vierkant.

Opgave 6.13 Algemeen over de ligging van de n -de eenheidswortels

- Toon aan: de n -de eenheidswortels vormen een regelmatige n -hoek.
- Je kunt ook denken aan de pijlen vanuit O naar de punten. Wat is de hoek die twee opeenvolgende pijlen maken bij O?
- Hoe groot zijn de binnenhoeken van de regelmatige n -hoek?
- Verklaar met behulp van 'kop-aanstaart-leggen' dat de som van de n -e eenheidswortels gelijk aan 0 is.
- Hieronder zie je een sterplaatje van de 24-e eenheidswortels. Rechts zijn de pijltjes (Dezelfde! Maar 50% verkleind) in een andere volgorde kop aan staart gelegd. Verklaar waarom de figuur gesloten is.
- Hoe moet je de volgorde van 24e-eenheidswortels kiezen om een met de klok meegaande kring van pijlen te krijgen?
- Op de volgende bladzijde zie je 720 kop-aan-staart volgordes van de 7-de-eenheidswortels. Eigenlijk zijn er $7! = 5040$ mogelijkheden, maar cyclisch niet verschillende volgordes (zoals $\{0, 2, 3, 6, 1, 5, 4\}$ en $\{2, 3, 6, 1, 5, 4, 0\}$) zijn maar één keer afgebeeld.



Notatie

We korten, voor een vaste n , even af als volgt:

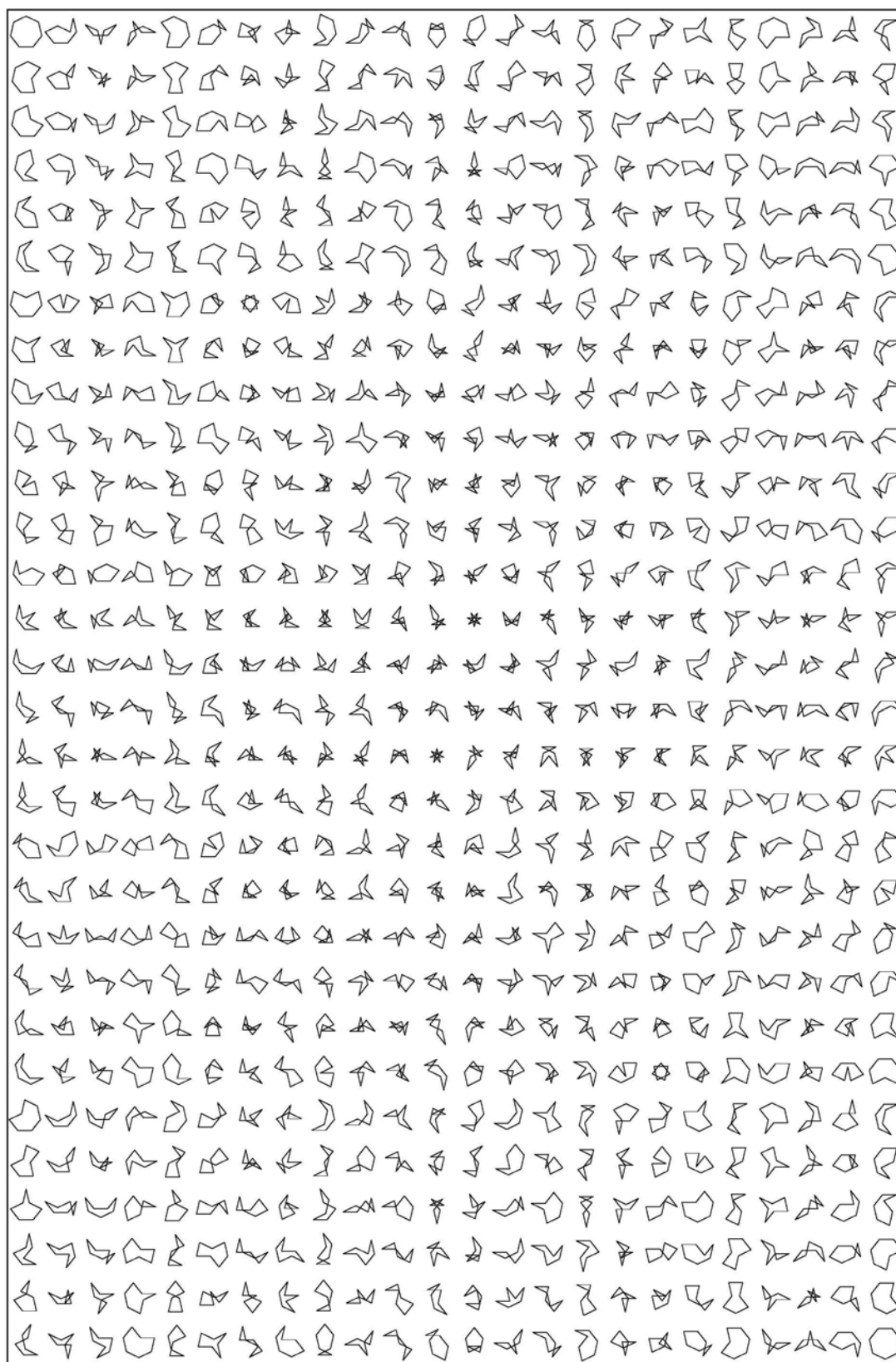
$$\zeta_n = e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$$

dan zijn dit de n -de eenheidswortels:

$$1, \zeta_n, \zeta_n^2, \zeta_n^3, \dots, \zeta_n^{(n-1)}$$

en we weten:

$$1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \zeta_n^3 + \dots + \zeta_n^{(n-1)} = 0$$



Eenheidswortels en ontbinden in factoren

De 7-de eenheidswortels voldoen aan de vergelijking $z^7 - 1 = 0$.

Ze zijn ook de wortels van

$$(z - 1) \cdot (z - \zeta_7) \cdot (z - \zeta_7^2) \cdot (z - \zeta_7^3) \cdot (z - \zeta_7^4) \cdot (z - \zeta_7^5) \cdot (z - \zeta_7^6) = 0$$

Conclusie:

$$z^7 - 1 = (z - 1) \cdot (z - \zeta_7) \cdot (z - \zeta_7^2) \cdot (z - \zeta_7^3) \cdot (z - \zeta_7^4) \cdot (z - \zeta_7^5) \cdot (z - \zeta_7^6)$$

Opgave 6.14 Verklaren zonder, met weinig en een beetje rekenen

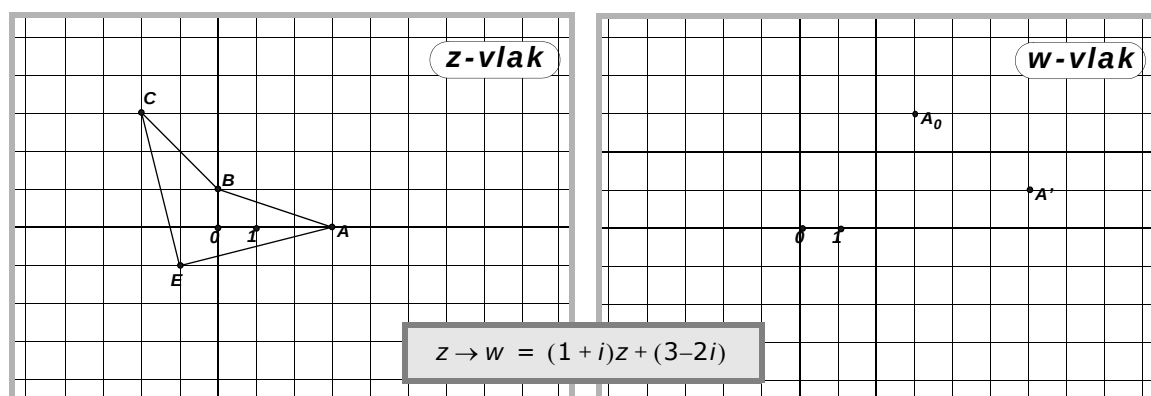
a. Zonder: ζ_7 en ζ_7^6 zijn elkaars geconjugeerden.

b. Weinig: $(z - \zeta_7) \cdot (z - \zeta_7^6) = z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)z + 1$

c. Een beetje:

$$\begin{aligned} & \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)z + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)z + 1\right) \cdot \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)z + 1\right) \\ &= \\ & z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \end{aligned}$$

d. Ontbind $\frac{z^{11} - 1}{z - 1}$ in vijf factoren die tweedegraads veeltermen met reële coëfficiënten zijn.

6.5 $w = az + b$ houdt alles in vorm**Afbeelden van z-vlak naar w-vlak****Opgave 6.15 We onderzoeken de werking van een lineaire functie!**

Punt A' in het w -vlak is gevonden door de formule $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$ op punt A in het z -vlak toe te passen. Dat is gedaan door in het w -vlak eerste het tussenpunt $A_0 = (1 + i) \cdot A$ te bepalen en daarna $A' = A_0 + (3 - 2i)$.

- Pas de functie $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$ ook toe op B , C en D om eerst B_0 , C_0 en E_0 en daarna B' , C' en E' in het w -vlak te vinden.
- Ga na dat hoek $A'E'C'$ recht is, net als hoek AEC .
- Ga na dat $A'E'$ en $E'C'$ even lang zijn, net als $A'E$ en $E'C$.
- De stap van $E_0 A_0$ naar $E'A'$ is een eenvoudige verschuiving over vector $(3 - 2i)$. Beschrijf hoe het lijntje EA 'beweegt' naar $E_0 A_0$.

In dit voorbeeld werd de formule $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$ opgedeeld in twee stappen. Eerst het vermenigvuldigen van z met $(1 + i)$ en daarna het optellen van $(3 - 2i)$.

De laatste stap was een zogenaamde *translatie*.

De eerste stap kunnen we ook nog in twee kleinere stappen opdelen als we ons realiseren dat, in de e -notatie, $(1 + i) = (\sqrt{2}) \cdot e^{i\pi/4}$.

De factor $e^{i\pi/4}$ is verantwoordelijk voor een draaiing over een hoek van $\pi/4$, met O als draaipunt.

De factor $(\sqrt{2})$ is verantwoordelijk voor een vergroting met centrum O .

Zo hebben we de lineaire *functie* $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$ ontrafeld als een opeenvolging van:

- een draaiing om O ,
- een vergroting met O als centrum,
- een verschuiving over een 'vector' $(3 - 2i)$.

terminologie in deze context van formules en figuren

- De z - en de w - punten heten respectievelijk *bron-* en *beeldpunten*.
- De functie zoals $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$ heet in deze meetkundige sfeer ook wel een *afbeelding* of *transformatie*.
- De afbeelding is een *samenstelling* van een *draaivermenigvuldiging* met een *verschuiving*.
- Voor de functie zijn alle mogelijke punten z bronpunten. Niet alleen de vierhoek, maar het hele z -vlak is de bron. Het is een transformatie van z -vlak naar w -vlak.

Opgave 6.16 Andere lineaire functies

Bij elke lineaire functie $w = az + b$ kan zo'n analyse uitgevoerd worden (a en b complex)

- Druk de draaiing, vergroting (of verkleining) en verschuiving uit in a en b .
- Wat weet je van a en b als de transformatie:
 - een zuivere draaiing over $\pi/2$ naar rechts is?
 - een zuivere translatie is zonder draaiing?
 - een puntspiegeling om 0 is?

Dekpunten

Het kan gebeuren dat door een afbeelding een punt z op zichzelf terecht komt. Dat zie je beter als je er aan denkt dat het z -vlak en het w -vlak allebei een 'plaatje' van dezelfde complexe getallen zijn. Voor het begrijpen van de afbeelding trokken we ze even uit elkaar.

In sommige gevallen kun je zo'n bijzonder punt direct zien. Bij de afbeelding $w = a \cdot z$ bijvoorbeeld, denk maar aan het punt O .

Opgave 6.17 Het dekpunt zoeken van $w = (1 + i) \cdot z + (3 - 2i)$

- Teken in het w -vlak van de figuur bij opgave 6.15 eens een (lichtgrijze) kopie van vierhoek $ABCE$.

Het lijkt er een beetje op dat vierhoek $ABCE$ door de functie rond $2+2i$ gedraaid is en wat uitvergroot is. Als dat voor alle punten in het vlak zo zou zijn, betekent het dat de functie niet echt iets zou doen met dat getal $2+2i$.

- Als dat waar is, moet gelden: $2+2i = (1 + i) \cdot (2+2i) + (3 - 2i)$. Ga dat na.
- Als het niet klopt, moeten we het punt D vinden waarvoor wél geldt:

$$D = (1 + i) \cdot D + (3 - 2i)$$

Vind D door oplossen van deze vergelijking en teken D in de figuur.

- Laat zien dat AD en $A'D$ een hoek van $\pi/4$ met elkaar maken en dat de lengteverhouding van AD en $A'D$ juist de vergrotingsfactor is.

Algemene definitie van dekpunt:

Een dekpunt van een afbeelding is een punt dat door de afbeelding op zichzelf wordt afgebeeld.

Opgave 6.18 Het dekpunt d van de afbeelding $w = a \cdot z + b$

- Stel de vergelijking op waar het dekpunt aan moet voldoen en leid daaruit af dat $d = \frac{b}{1-a}$.
- Er is een uitzonderingssituatie! Welke? Wat is $w = a \cdot z + b$ dan voor soort afbeelding?

Opgave 6.19 De dekpuntsvorm van $w = a \cdot z + b$

Het getal a bepaalt de draaiing en vergroting die figuren bij de afbeelding $w = a \cdot z + b$ ondergaan. d is het punt dat stil blijft liggen onder de afbeelding.

We gaan nu het verband $w = a \cdot z + b$ dan ook noteren met behulp van a en d en zonder b .

- Druk b in d en a uit en vul dat voor b in de formule $w = a \cdot z + b$ in.
- Laat zien dat je dit kunt omwerken naar

$$w - d = a \cdot (z - d)$$

formule 6-13

- Leg uit dat hier algebraïsch wordt uitgedrukt wat in opgave 6.17d met een voorbeeld is uitgezocht:

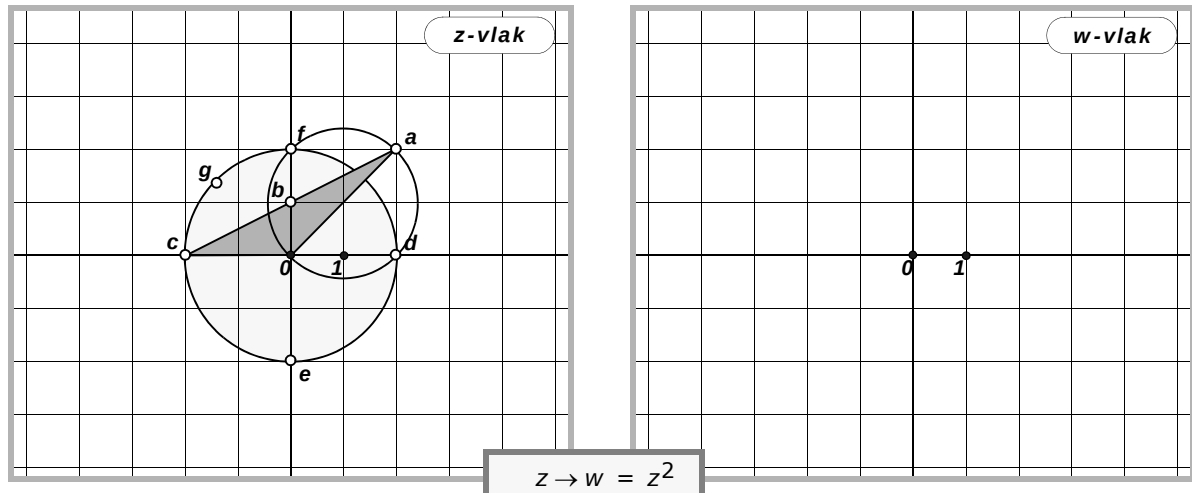
bij een lineaire functie $w = a \cdot z + b$ is het beeld van een figuur altijd gelijkvormig met het origineel.

6.6 De afbeeldingen $z \rightarrow z^2$ en $z \rightarrow z^n$

We hebben gezien dat lineaire functies figuren in het z -vlak wel vergroten of verkleinen en verdraaien, maar niet vervormen. Cirkels en lijnen in de bron worden dus als cirkels en lijnen in het beeld afgebeeld.

Gaat het dat ook zo bij de functie $w = z^2$? Vast niet, maar wat gebeurt er dan wél?

Opgave 6.20 Verkenning



- Teken de beelden van 0 en de punten a tot en met g en maak een schets van de beelden van de driehoek en de twee cirkels.
- Het gaat om drie stukjes rechte lijn en twee cirkels. Geef antwoorden op de voor de hand liggende vragen met *Ja* of *Nee* of *Misschien wel* of iets dergelijks.
 - Lijnstuk Oa wordt afgebeeld als lijnstuk?
 - Lijnstuk ac wordt afgebeeld als lijnstuk?
 - Lijnstuk ac wordt afgebeeld als cirkelboog?
 - Midden van fe wordt afgebeeld als midden van het beeld van fe ?
 - Cirkel $dfgce$ wordt afgebeeld als cirkel?
 - Cirkel $Odaf$ wordt afgebeeld als cirkel?
- Wat vind je het belangrijkste verschil van $w = z^2$ met de afbeelding $w = a \cdot z + b$?
 Bij ons onderzoek van $w = a \cdot z + b$ hebben we gemerkt dat het vermenigvuldigdeel van de formule ($a \cdot z$) zich goed laat onderzoeken via de pool- of e-machtvoorstelling.
 Dat doen we bij $w = z^2$ dan ook maar.

Opgave 6.21 Kwadrateren $w = z^2$ als afbeelding onderzocht

We gaan uit van de voorstelling $z = Re^{i\vartheta}$. R en ϑ zijn absolute waarde en argument van z .

- We weten dan dat $w = R^2 e^{2i\vartheta}$. Waarom is dat zo?
- De punten z met absolute waarde 4 liggen op een cirkel. Wat is het *beeld* van die cirkel onder de kwadrateerafbeelding?
- Doorloop de cirkel van punten z met absolute waarde 4 in gedachten mee.
 Loop met constante snelheid rond vanaf het begin bij 4, dan naar $4i$, naar -4 , dan $-4i$ en tenslotte weer naar 4 terug. Beschrijf nauwkeurig welke route het punt $w = z^2$ dan doorloopt.
- De punten met argument $\pi/5$ liggen op een halve lijn die in 0 start. Wat is het beeld van deze halve lijn onder de kwadrateerafbeelding?
- Als z met vaste snelheid over deze halve lijn loopt, loopt z^2 dan ook met vaste snelheid?

De dubbele doorloop en de generalisatie naar $w = z^n$

In opgave 6.21 kunnen we natuurlijk ook gemakkelijk met andere absolute waarden en argumenten werken.

Opgave 6.22 Er blijkt wat betreft $w = z^2$ te gelden

- $w = z^2$ beeldt cirkels om de oorsprong af op cirkels om de oorsprong, met een straal *die het kwadraat is* van de oorspronkelijke straal,
- de beeldcirkel van de cirkel $|z| = R$ wordt met *dubbele hoeksnelheid* doorlopen. Maakt z één ronde, dan maakt $w = z^2$ er twee,
- $w = z^2$ beeldt stralen vanuit de oorsprong af op stralen uit de oorsprong waarvan het argument het *dubbele* is van het argument van de oorspronkelijke straal,
- de functie $w = z^2$ treft alle beeldpunten, op het punt 0 na, allemaal *twee* keer; anders gezegd: de afbeelding is een *dubbele overlapping* van de complexe getallen zonder 0 op de complexe getallen zonder de 0.

Controleer de juistheid van deze vier beweringen met de poolvoorstelling en de uitwerking van het kwadraat zoals in opgave 6.21a.

Opgave 6.23 Generalisatie naar andere machten

Soortgelijke eigenschappen hebben andere functies $w = z^n$ voor natuurlijke getallen n .

a. Maak de juiste aanpassingen:

- $w = z^n$ beeldt cirkels om de oorsprong af op cirkels om de oorsprong met een straal die is van de oorspronkelijke straal.
- De beeldcirkel van de cirkel $|z| = R$ wordt metsnelheid doorlopen. Maakt z een ronde, dan maakt $w = z^n$ er
- $w = z^n$ beeldt stralen vanuit de oorsprong af op stralen uit de oorsprong waarvan het argument het is van het argument van de oorspronkelijke straal.
- De functie $w = z^n$ treft alle beeldpunten, op het punt 0 na, allemaal keer. Anders gezegd: de afbeelding is een *overlapping* van de complexe getallen zonder 0 op de complexe getallen zonder de 0.

Je ziet:

Het gedrag van de functies $w = z^n$ is mooi te beschrijven met behulp van het net van stralen en cirkels om de oorsprong door zowel van de stralen als de cirkels vast te leggen wat de beelden zijn onder $w = z^n$.

6.7 Naar de hoofdstelling van de algebra

Je hebt eerder gezien dat in het complexe domein elke vierkantsvergelijking een oplossing heeft.

Bij vergelijkingen met reële coëfficiënten met de eis dat de oplossingen reëel moeten zijn, was er niet altijd een oplossing. Je hebt voorbeelden van vierdegraadsvergelijkingen gezien die geen reële oplossingen hebben, bijvoorbeeld de vergelijking $x^4 + 1 = 0$. Maar de oplossingen zijn er eigenlijk wel: in het complexe vlak.

Nu gaan we aannemelijk maken dat *elke* vergelijking die opgebouwd is met gehele machten van de onbekende, een oplossing heeft. De vergelijkingen waar het om gaat heten *veeltermvergelijkingen*. Dus vergelijkingen van deze algemene vorm:

$$az^n + bz^{n-1} + \dots + \dots + pz + q = 0$$

n is hier dus een (vast) natuurlijk getal. a, b , etc. zijn vaste complexe getallen. z is de onbekende die gevonden moet worden.

Neem a maar ongelijk aan 0, anders gaat het om een lagere graad dan n . Neem ook q maar ongelijk aan 0, want anders zie je de oplossing $z = 0$ direct zitten.

Je mag je ook beperken tot $a = 1$, want als $a \neq 0$, kunnen we alle coëfficiënten door a delen.

De hoofdstelling van de algebra

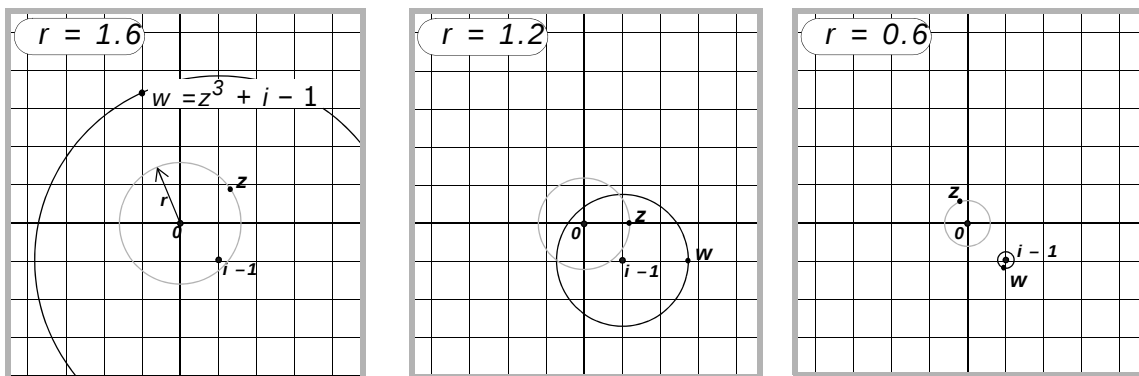
Deze zegt:

Veeltermvergelijkingen hebben altijd een of meer oplossingen in het complexe vlak.

Voor deze stelling bestaan vele bewijzen, die ieder op een bepaalde manier gebruik maken van de eigenschappen van de complexe getallen. In deze paragraaf schetsen we een redenering die sterk op de vorige paragraaf en op andere meetkundige intuïties leunt. Vandaar dat hier niet staat: 'een bewijs'. Van de redenering kan wel een bewijs gemaakt worden, maar we streven die volledigheid hier niet na; we laten het bij het opbouwen van een inzicht.

De redenering gedemonstreerd aan een eenvoudig geval: $z^3 + i - 1 = 0$

In de volgende drie plaatjes zijn steeds z en w in één figuur getekend. w is steeds het beeld van een cirkel $|z| = r$ getekend onder de afbeelding $w = z^3 + i - 1 = 0$. Dat zijn in dit geval steeds cirkels om het punt $i - 1$. De waarde van r is eerst groot, dan kleiner en dan heel dicht bij 0. Denk aan een vloeiende dalende beweging van een grote r naar 0.



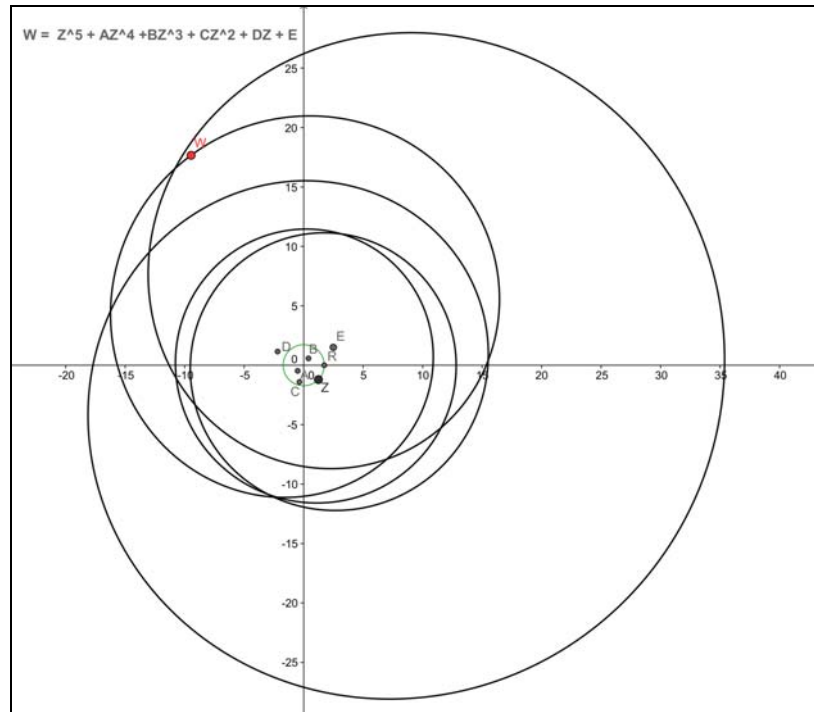
Aanvankelijk is r zo groot gekozen dat de w -cirkel ver om het punt O heen loopt.

Als r kleiner wordt, krimpt ook de w -cirkel. Tenslotte krimpt die naar het punt $i - 1$ als r gelijk 0 wordt.

Maar dan moet onderweg de w -cirkel over het punt O zijn gegleden. Dat betekent dat er dan een punt z op de z -cirkel ligt, waarvoor geldt: $w = z^3 + i - 1 = 0$. Die z is een oplossing van de vergelijking!

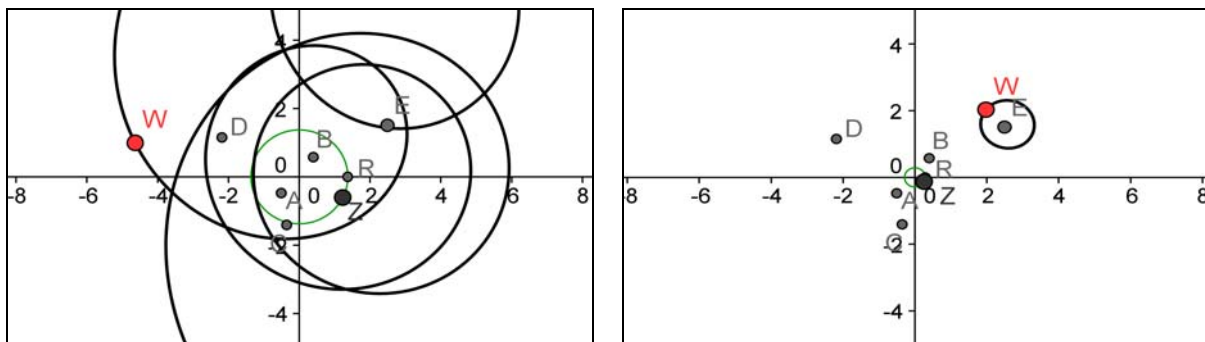
Hetzelfde idee, maar nu met andere beelden van een andere veelterm!

De veeltermvergelijking in deze illustratie is $z^5 + A z^4 + B z^3 + C z^2 + D z + E = 0$. Het is gemaakt met een Geogebra-applet; de coëfficiënten A , B , C , D en E zijn versleepbare punten in het vlak.



Weer loopt z over een cirkel met straal r , het betrekkelijk kleine cirkeltje rond O in de figuur. Maar het beeld onder $w = z^5 + A z^4 + B z^3 + C z^2 + D z + E$ is nu een wildere figuur, die wél 5 keer om O heendraait. Volg de baan van w in de figuur, het is één enkele doorlopende gesloten kromme.

Ook de straal r is door verslepen te veranderen, zodat het proces goed te volgen is. Twee beelden volstaan, op iets grotere schaal, om te laten zien dat ook hier de baan van w inkrimpt naar de constante term in de vergelijking, dus naar punt E in de figuur. En weer: dat kan niet gebeuren zonder dat de krimpende baan over het punt O glijdt, waardoor een nulpunt is gevonden: namelijk dat punt z , dat verantwoordelijk is voor leveren van het punt w dat op 0 komt.



Belangrijk in de redenering is, dat we zeker moeten weten, dat er altijd wel een waarde van r te vinden is, waarbij de kromme (het beeld van de cirkel $|z| = r$) echt om O loopt. Dat laten we apart zien.

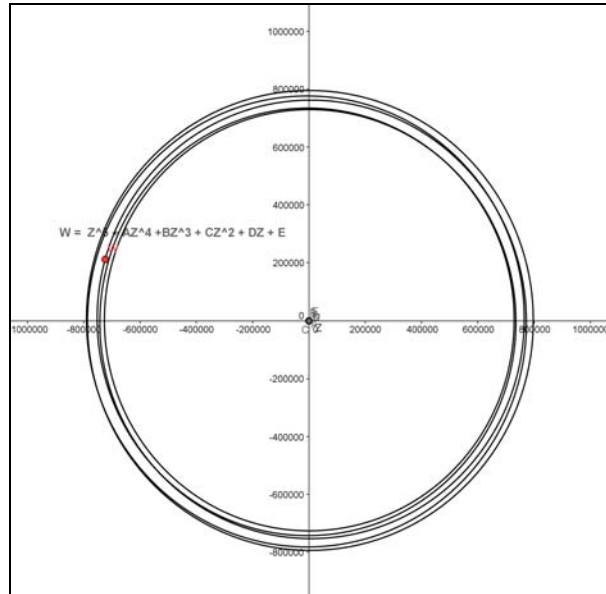
Tussen de ooghaaren door kijken bij grote waarden van r

Wat er aan de hand is, is goed te zien als we r wat groter laten worden.

In dit voorbeeld is $r = 15$ gekozen. Alleen de term z^5 is in absolute waarde nu ruim 750 000. (Dus voor het plaatje is ver uitgezoomd.)

Wat opvalt is: het lijkt wel of de term z^5 alleen zowat volledig de dienst uitmaakt.

Dat is inderdaad het geval! We gaan dat exacter formuleren en .. bewijzen.



We gaan bij het voorbeeld

$W = z^5 + 2z^4 - iz^3 + z^2 - 6z + 10$
nu laten zien dat de bijdrage van de staart van de formule gering is in vergelijking met de kopterm z^5 in deze zin:

Als r groter is dan een zo dadelijk nog aan te geven waarde, dan geldt als $|z| = r$:

$$|2z^4 - iz^3 + z^2 - 6z + 10| \leq \frac{1}{10} \cdot |r|^5 \quad \text{formule 6-14}$$

Als dat waar is, zijn we klaar. Want dan ligt het punt W hooguit $|z^5|/10$ van z^5 af, en dus gaat w met z^5 in een bijna-cirkelbeweging mee om het punt O heen.

Zo vullen we het laatste gat in de redenering, een *afschatting*:

$$|2z^4 - iz^3 + z^2 - 6z + 10| \leq |2z^4| + |iz^3| + |z^2| + |6z| + |10| \leq 5 \times 10 \times |z|^4$$

$\swarrow$ *aantal termen*
 $\swarrow$ *de grootste coëfficiënt*
 $\nwarrow$ *hoogste macht van z*

Aan

$$5 \times 10 \times |z|^4 \leq \frac{1}{10} \cdot |z|^5$$

is zeker voldaan als $|z| = r \geq 5 \cdot 10 \cdot 10 = 500$. Dan geldt dus ook de ongelijkheid van formule 6-14.

Daarmee is de redenering voor dit voorbeeld af. Het is duidelijk, dat het ook voor andere veeltermvergelijkingen mogelijk is zo'n grens voor r aan te geven.



Gauss rond 1800

De stelling dat elke veeltermvergelijking in het complexe domein oplossingen heeft (en wel maximaal zoveel als de graad n hoog is) is voor het eerst bewezen door Gauss, in 1799.

Het bewijs voldeed niet echt aan moderne wiskundige standaarden, maar was wel overtuigend.

Dat is bij ons bewijs hierboven ook het geval: de zwakke plek is dat het niet zo makkelijk hard is te maken dat het krimpen zo mooi loopt als gesuggereerd wordt.

Jean Argand (waar wij de polaire voorstelling van de complexe getallen aan danken) vond in 1806 het eerste volledig correcte bewijs.

6.8 Wat moet e^z zijn voor complexe waarden van z ?

Inleiding

Dit onderdeel hebben we voor de elektrische netwerken eigenlijk niet nodig, maar voor de volledigheid volgt het hier toch.

e^x is je bekend uit de gewone analyse. Het is de exponentiële functie met grondtal e . Je weet ook dat de afgeleide van e^x weer de functie e^x zelf is. Dat feit maakt de functie tot een spin in het netwerk van ontelbare toepassingen.

In paragraaf 4.17 hebben we de e -macht ook gedefinieerd voor imaginaire getallen; via de definitie die eigenlijk een soort afkorting was:

$$e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \quad \text{formule 6-15}$$

Dit hebben we, meestal met $\alpha = \omega t$, met succes gebruikt bij het rekenen aan schakelingen en ook bij het verkennen van complexe vergelijkingen en goniometrische formules.

In feite hebben we dus al afgesproken wat e^z is,

- als z op de reële as ligt
- en als z op de imaginaire as ligt.

Nu breiden we de definitie van e^z uit tot het hele complexe vlak. Het is weliswaar een definitie, maar we hebben niet veel keus.

De definitie van e^z

Als we z bekijken in cartesische voorstelling als $z = x + iy$ met reële getallen u en v , en we willen dat e^z zich houdt aan de algebraïsche regel voor rekenen met exponenten, dan *definiëren* we dat

$$e^z = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv} \quad \text{formule 6-16}$$

De twee factoren in het rechterlid zijn al bekend en zo ligt de e -macht voor complexe getallen dus vast!

Opgave 6.24 Gedraagt e^z zich nu algebraïsch inderdaad als een exponentiële functie?

a. Toon aan dat voor alle álle complexe z_1 en z_2 geldt

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Gebruik de cartesische voorstellingen van z_1 en z_2 en de definitie van formule 6-16.

Betekent het nog wel wat?

Ja en nee. Of: ja, maar nog niet direct.

Bedenk eerst: trap niet in de val om te gaan bedenken hoe je dat machtsverheffen nu moet uitvoeren zoals je 14^7 via cijferend vermenigvuldigen uit zou rekenen: $14 \cdot 14 = 196$, $196 \cdot 14 = 2744$, etc..

Daar gaat het niet over. Je moet alleen de definitie van e^z volgen.

Opgave 6.25 Reken eerst maar eens volgens de definitie een waarde uit

a. Druk $e^{2+\pi/2 i}$ in cartesische vorm uit.

b. Zoek een complex getal z , waarvoor geldt: $e^z = 1 + i$. (Tip: schrijf het getal eerst in de bekende e -notatie)

Anders tegen de definitie aankijken kan ook helpen

We zijn er al aan gewend dat elk complex getal U in de vorm

$$U = R \cdot e^{i\varphi}$$

gebracht kan worden.

Omdat R positief is (als U niet nul is), bestaat er een (reëel) getal x waarvoor geldt: $R = e^x$. x is dan de natuurlijke logaritme van R .

Alleen het laatste $=$ -teken in deze regel danken we nu aan onze definitie 6-16:

$$U = R \cdot e^{i\varphi} = e^x \cdot e^{i\varphi} = e^{x + i\varphi}$$

In de praktijk betekent het dat je de gewone e -macht en de complexe mag 'mengen' in het rekenwerk.

In het begin van dit boek kwam je terzijde (in figuur 1-12) tegen dat het bij leeglopen van een condensator over een weerstand het uitdoven van de spanning zo beschreven kan worden:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-tc}, \text{ met bijvoorbeeld } c = 1/RC.$$

En van de ander kant leerde je de e -notatie gebruiken voor wisselspanningen:

$$U(t) = U_0 \cdot e^{i\omega t}$$

Opgave 6.26 Wat betekent dat?

Het zal je niet verbazen als in een schakeling op een component zoiets als het volgende gebeurt, met een positieve constante c :

$$U(t) = U_0 \cdot e^{-tc} \cdot e^{i\omega t}$$

Hoe zou je zo'n spanningsverloop in woorden beschrijven?

6.9 Bijzonderheden van e^z

Periodiciteit

Opgave 6.27 e^z is een periodieke functie!

- a. Toon aan dat de functie e^z periodiek is met periode $2\pi i$. Dat wil zeggen, dat voor alle complexe z en gehele getallen k geldt:

$$e^{z + 2k\pi i} = e^z$$

Je merkt weer: algebraïsch klopt het idee, maar je moet je oude intuïtie voor periodiciteit deels loslaten. Die intuïtie had vermoedelijk te maken met periodiciteit binnen een tijdsbesef: periodiciteit was dan dat een functie een vast 'tijdje' later hetzelfde doet als op een eerder moment. Hier gebruiken we ook het begrip periodiciteit, maar dat betekent alleen dat de formules zich algebraïsch gedragen als gewone periodieke functies, maar dat je een ander soort getal in moet vullen.

Verbanden met sinus en cosinus

De e -macht van z is periodiek 'in de imaginaire richting'; dat komt omdat we de e -macht voor imaginaire getallen via de cosinus en sinus, toegepast op reële getallen, hebben opgebouwd.

Van belang is dat we ook de cosinus en de sinus omgekeerd in de e -macht kunnen uitdrukken.

Opgave 6.28 Formules voor sinus en cosinus

- a. Toon aan met behulp van formule 6-15, met $\mathbf{v} = \mathbf{x}$ en $\mathbf{v} = -\mathbf{x}$, dat

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

formule 6-17

- b. Vind een soortgelijke formule voor $\sin x$.

Het bijzondere aan deze formules is dat we met de e-macht wat makkelijker kunnen rekenen dan met de cosinus zelf als het om een rijtje waarden x , $2x$, $3x$, etc. gaat. De bijhorende e-waarden vormen dan een meetkundige rij, die relatief makkelijk te sommeren is.

Opgave 6.29 Uitdagende opgave

- a. Toon aan met behulp van formule 6-17 dat voor alle natuurlijke getallen n geldt:

$$\cos(0) + \cos\left(1 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(2 \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + \dots + \dots + \cos\left((n-1) \cdot \frac{2\pi}{n}\right) = 0$$

- b. Geldt een soortgelijke formule voor de sinus?

Van (voorlopig nogal) theoretisch belang is dat formule 6-17 ook de mogelijkheid geeft om de cosinus uit te breiden tot functie op het complexe vlak!

De e-macht als afbeelding in het complexe vlak

De e-macht hebben we voor complexe z gedefinieerd met behulp van de cartesische voorstelling van z , $z = u + iv$:

$$e^z = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}$$

Daardoor kunnen we goed nagaan wat de beelden van de roosterlijnen van de cartesische voorstelling zijn. Zo bouwen we een beeld op van wat de e-macht met het hele vlak doet: de globale visie.

Opgave 6.30 Neem u eens constant, gelijk u_0

De punten $z = u_0 + vi$, u_0 vast en v variabel, vormen een lijn evenwijdig aan de imaginaire as.

- Wat is het beeld van deze lijn onder de afbeelding?
- Neem eens als voorbeeld $u_0 = -1000$. Kun je iets zeggen over de *grootte* van het beeld van de lijn?
- En ook voor $u_0 = -100000$, voor $u_0 = 0$ en $u_0 = 1000$.
- Hoe zit het in al de gevallen met de meervoudige overlapping?

Opgave 6.31 Neem v eens constant, v_0

De punten $z = u + v_0 i$, v_0 vast en u variabel, vormen een horizontale lijn.

- Wat is het beeld van deze lijn?
- Als v_0 verschillende waarden doorloopt, wat gebeurt er dan met het beeld van de lijn?

Opgave 6.32 Samenvatting e^z

Het globale beeld van e^z als afbeelding beschreven:

De verticale lijnen worden opgerold op cirkels. De periodiciteit zorgt er voor dat er oneindigvoudige overlap is.

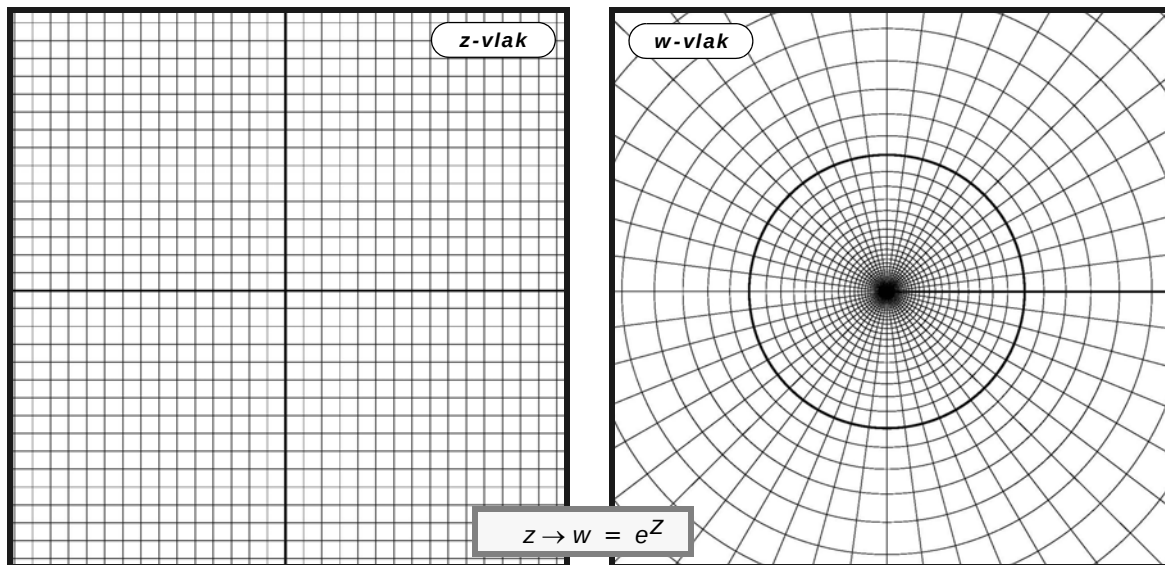
Naarmate de verticale lijn een lagere u -waarde heeft, wordt de opgerolde cirkel wel kleiner.

De nulwaarde van het z -vlak wordt niet geraakt, maar alle andere waarden oneindig vaak!

- a. Vul deze samenvatting aan met wat nauwkeuriger mededelingen.

Bijvoorbeeld: de *horizontale lijnen worden afgebeeld op*

Opgave 6.33 De complexe e-macht in kaart

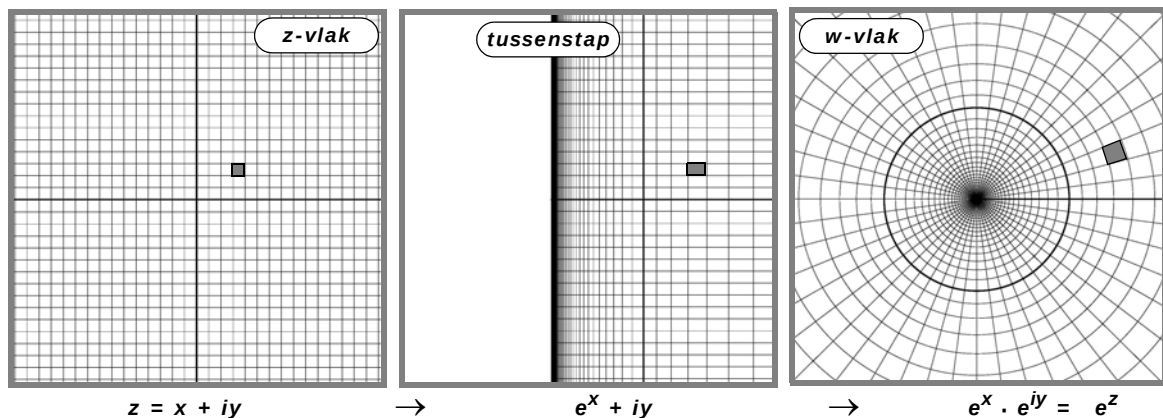


figuur 6-1

In de figuur hier links zijn de roosterlijnen op onderlinge afstanden $\pi/24$ gelegd. De iets verdikte lijnen zijn de reële en imaginaire assen. De figuur rechts is het resultaat van de afbeelding $z \rightarrow w = e^z$, zoals onderzocht in de voorgaande opgaven; inclusief de verdikking van de lijnen.

- De roosterindeling is zo gekozen om rechts een mooi beeld te krijgen. Hoe kun uit het plaatje rechts afleiden dat de maaswijdte in het linkerplaatje vertikale richting inderdaad $\pi/24$ is?
- Markeer in de rechterfiguur de punten 0 en 1.

6.10 e^z is een conforme afbeelding



figuur 6-2

Hier is een tussenstap ingevoegd bij de vorige figuur.

In het middelste plaatje is als het ware alleen het reële deel van z gebruikt in de berekening. Daar zie je dan de imaginaire coördinaat onveranderd; zie het onderschrift. Alle horizontale lijnen in het eerste plaatje worden dan halflijnen, het zijn allemaal beelden van de reële as onder de afbeelding $x \rightarrow e^x$.

Bij de overgang naar het derde plaatje zie je die halflijnen terug als stralen vanuit O . Die halflijnen worden met hun beginpunten op elkaar gelegd en vormen een waaijer.

Dat is ook de manier waarop je van een langwerpige rechthoek van



papier een waaier kunt maken. Je vouwt het papier zigzag en trekt aan een kant een draadje erdoor. Zie het voorbeeld.

Kijk naar een heel klein vierkantje in het linkerplaatje van figuur 6-2; er is er één grijs gemaakt. Dat wordt in het middelste plaatje afgebeeld als een rechthoekje. De oprekfactor in de x -richting is de afgeleide van e^x , dus die is weer e^x zelf. Bij de volgende stap wordt de verdikte verticale lijn precies opgerold naar de verdikte cirkel; dat is de eenheidscirkel. Maar het rechthoekje krijgt nu een oprekking die evenredig is met de afstand tot het begin van de lijn: weer met een factor e^x dus. Het eindresultaat is dus weer een vierkantje. Hoe kleiner je het beginvierkantje neemt hoe preciezer het klopt.

Op microscopische schaal werkt de complexe e -macht dus vormtrouw. Het is een zogenaamde *conforme* afbeelding.

Een volgende stap na dit hoofdstuk zou kunnen zijn: andere functies van een complexe variabele bekijken en dan onderzoeken welke er *conform* zijn en welke er net als de veeltermfuncties en de e -macht het *hele complexe vlak als beeld* hebben. Je komt dan op het terrein van de *Theorie van de Complexe Functies*. De verassing is groot: heel veel andere functies hebben precies die eigenschappen!

Twee conforme kaartprojecties met e^z ertussen

De afbeelding e^z verschijnt op een verrassende manier bij het maken van wereldkaarten. We besluiten dit hoofdstuk met een afbeelding die dat vertoont.

Wie een platte kaart wil maken van de bolle aardbol, zit met een probleem. Je kunt onmogelijk alle onderlinge afstanden van plaatsen in verhouding goed krijgen.

Het is wel mogelijk een kaart te maken die *conform* is: die op een klein gebiedje wel hoeken en verhouding heel goed heel laat, maar op grotere afstanden niet. Op zo'n kaart is bij wijze van spreken Amsterdam heel goed afgebeeld maar de verhoudingen in afstand tot plaatsen verder weg niet.

Twee bijzondere kaarten zijn *conform*:

- *De kaart van Mercator*. Daarbij worden parallelcirkels op evenwijdige horizontale lijnen afgebeeld en meridiaancirkels op verticale lijnen. Naarmate je verder van de evenaar zit, moet je de parallelcirkels verder uit elkaar leggen. Ze worden namelijk eigenlijk steeds meer opgerekt, en voor de conformiteit moet je dan ook verticaal oprekken.

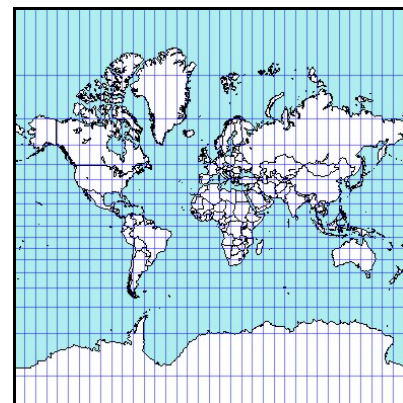
Het is de kaart met de 'wassende breedten'. (*wassen* is hier het wassen van gewassen in het boerenbedrijf: groeien.).

De noord- en zuidpool staan niet op de kaart. Het wassen van de breedtes zou daar oneindig 'groot' zijn! Eigenlijk loopt de *kaart* dan ook naar boven en onder onbegrensd door. Het is gebruikelijk in atlassen de ver noordelijke en ver zuidelijke delen weg te laten.

In de oost-westrichting kun je de kaart ook voortzetten: dan moet je oostelijk van Siberië weer Alaska gaan herhalen.

- *De kaart in stereografische projectie*. Zo'n kaart maak je (bijvoorbeeld) door bij een globe een raakvlak aan de noordpool aan te brengen, en dan alle punten van de globaal vanuit de zuidpool op het raakvlak te projecteren via rechte lijnen. Men kan meetkundig bewijzen dat deze kaart conform is. Op deze kaart zie je alle meridiaancirkels als stralen vanuit één punt, de Noordpool op de kaart. De parallelcirkels worden afgebeeld als cirkels.

Theoretisch kan de aarde, op de zuidpool na op deze



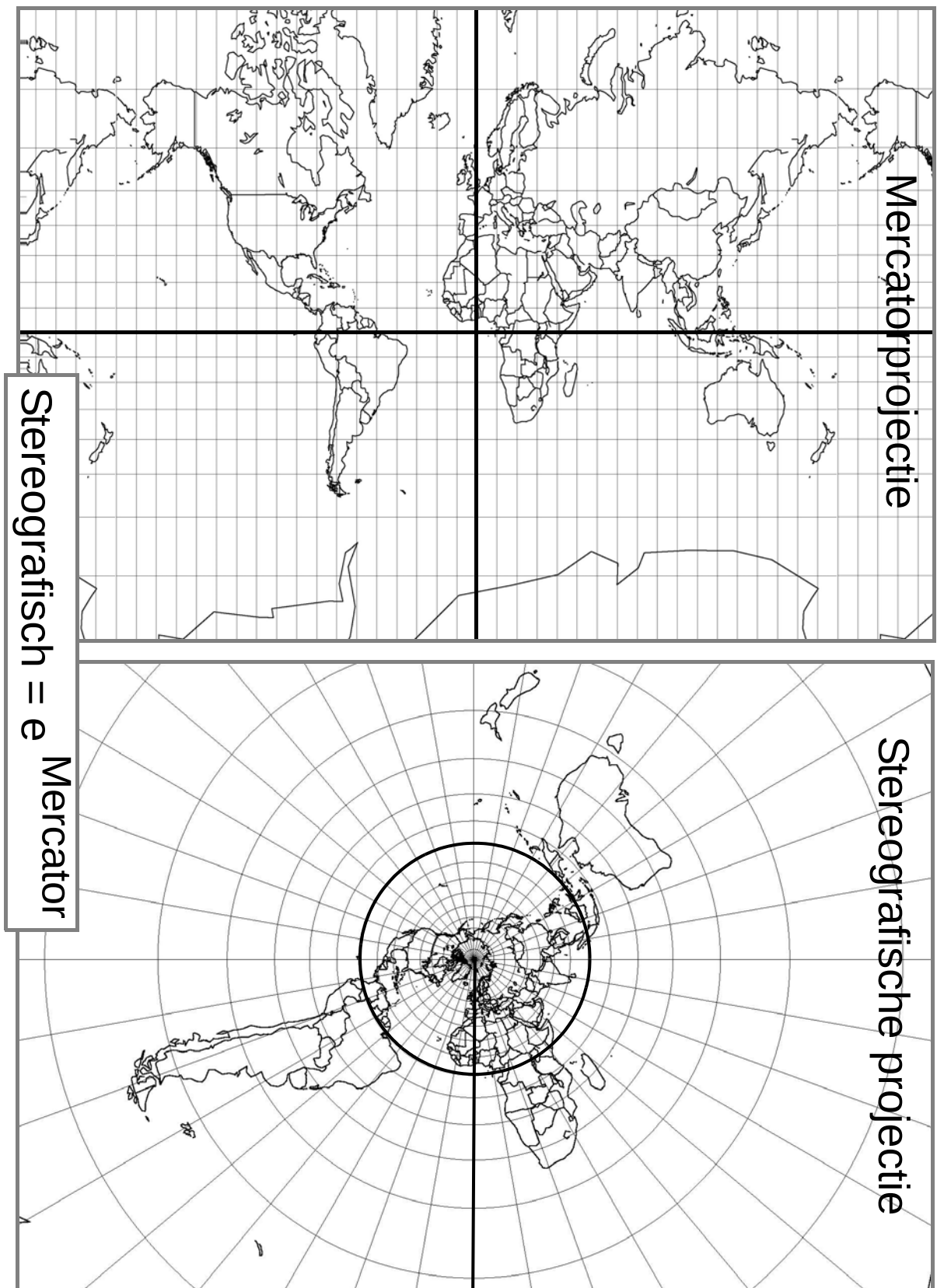
manier afgebeeld worden, maar de kaart wordt dan erg groot. Hier is alleen het noordelijk halfrond afgebeeld. (Bron afbeeldingene: www.mgaqua.net)

Het rechthoekige, cartesische beeld van de Mercatorprojectie en het stralen-en-cirkels beeld van de stereografische projectie lijken wel wat op onze figuur waar de complexe e -macht als afbeelding is weergegeven, figuur 6-1.

Het is nog sterker: je kunt de Mercatorkaart en de stereografische kaart zo naast elkaar zetten, dat de relatie tussen de een en de ander precies wordt gegeven door de afbeelding $w = e^z$.

Bijzonder!

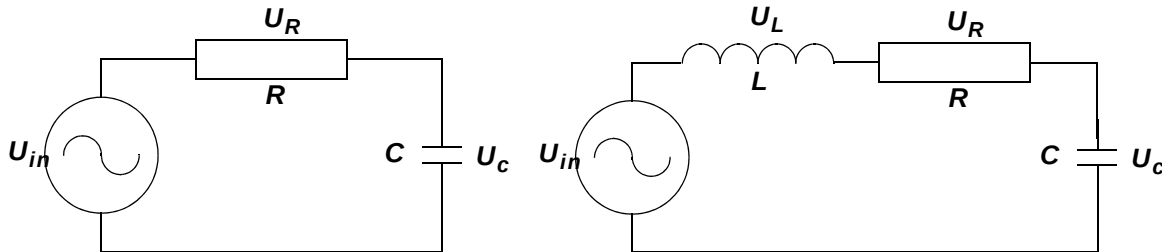
Op de volgende bladzijde zie je dit geïllustreerd; als laatste onderdeel van dit hoofdstuk. Een bewijs dat het werkelijk klopt, past niet in dit boek. Maar vanuit de *Theorie van de complexe functies* gezien is het niet zo heel moeilijk.



Appendix A: Signalen in een LCR-schakeling met wisselspanninginvoer

Inleiding

Bij schakelingen als deze RC-kring en LRC-kring



is de ingangsspanning een sinussignaal $U_0 \sin(\omega t)$. In de hoofdstukken van dit boek wordt er vanuit gegaan dat de spanningen over de componenten dan ook sinussignalen met dezelfde frequentie zijn. Als we dat weten, zijn die signalen wat betreft amplitude en faseverschuiving te berekenen.

In deze appendix vullen we het gat in de theorie op door te laten zien hoe bewezen kan worden dat die signalen inderdaad de bedoelde eigenschap hebben. We doen dat door het bewijs voor de eerste van deze twee schakelingen volledig te geven en aan te duiden hoe het bewijs voor andere schakelingen loopt.

De RC-kring

De drie spanningen zijn tijdsafhankelijk: $U_{in}(t)$, $U_R(t)$ en $U_C(t)$. Er is één stroom in deze kring: $I(t)$. Gegeven is dat $U_{in}(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t)$.

We gaan nu in eerste instantie aantonen dat $I(t)$ een sinusoidale met hoekfrequentie ω is. Dat de deelspanningen dat dan ook zijn, volgt dan uit de wet van Ohm voor U_R en uit de theorie van hoofdstuk 2 voor U_C .

Er gelden de volgende verbanden:

$$U_R(t) + U_C(t) = U_{in}(t) \quad \text{formule A.1}$$

$$U_R(t) = R \cdot I(t) \quad C \cdot \frac{d(U_C(t))}{dt} = I(t) \quad U_{in}(t) = U_0 \cdot \sin(\omega t) \quad \text{formule A.2}$$

Om een vergelijking te krijgen waar alleen I en niet de twee spanningen $U_R(t)$ en $U_C(t)$ voorkomen, differentiëren we vergelijking A.1 en gebruiken de andere verbanden

$$R \cdot \frac{d(I(t))}{dt} + \frac{I(t)}{C} = \omega \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{formule A.3}$$

Dit is een vergelijking waarin I en de afgeleide van I beide voorkomen, een eerste orde differentiaalvergelijking. We moeten vinden welke functies aan deze vergelijking voldoen; die functies zijn de zogenaamde 'oplossingen' van dit soort vergelijkingen.

Wat betekent 'oplossing' van zo'n vergelijking?

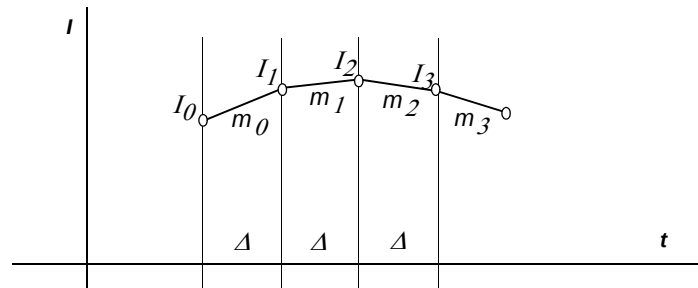
Een 'oplossing' van een differentiaalvergelijking als A.3 is niet één of enkele waarden voor t die aan de vergelijking voldoen. De 'oplossing' is een functie, in dit geval een functie $I(t)$ die aan de vergelijking voldoet; als je dus die functie en zijn afgeleide invult in de vergelijking, moet het voor alle waarden van t kloppen.

Voor zulke vergelijkingen als A.3 bestaan standaardoplossingstechnieken om zulke oplossingen te vinden, maar het is instructief om het even 'van de grond af aan' te doen.

Je kunt je een 'oplossing' van zo'n vergelijking als volgt groeiend in de tijd voorstellen.

Je begint bij (bijvoorbeeld) t_0 . $I(t_0)$ moet daar een waarde hebben; om te beginnen, kiezen we die maar zelf. We hopen nu dat we in het punt $(t_0, I(t_0))$ een grafiek voor I kunnen laten beginnen en doorlopen, die zo hoog gaat en zo helt dat het steeds met de vergelijking A.3 klopt. Voor het eerste moment (t_0) gaat dat altijd goed. Vul t_0 rechts in de vergelijking in en de gekozen waarde van $I(t_0)$ in de tweede term links. Dan ligt echter meteen vast wat de afgeleide van I in het punt t_0 moet zijn! Zodra de tijd loopt, bepaalt de afgeleide van I nu hoe snel I zelf stijgt of daalt, en dat bepaalt dus weer hoe de afgeleide moet veranderen om de vergelijking kloppend te houden. Ofwel: de afgeleide van I op een moment en de waarde van I zelf op dat moment bepalen voor een korte nabije toekomst direct na dat moment zowel I zelf als de afgeleide van I .

Je kunt je het proces in afgepaste kleine stapje Δ voorstellen. Dat is maar een benaderende denkwijze, maar er ontstaat een grafiek van kleine rechte stukjes, waarbij steeds de waarde van I in een punt volgens de vergelijking klopt met de helling die daar begint. Zie de figuur hieronder.



Δ is hier dus vast en I_0 is als startwaarde gekozen.

Nu ontwikkelt zich dit proces:

- A₀-stap: I_0 legt via de vergelijking vast wat de helling m_0 op het moment t_0 moet zijn.
- B₀-stap: I_0 en m_0 bepalen een stukje lijnvormige grafiek. Op $t_1 = t_0 + \Delta$ is de waarde I_1 bereikt.
- A₁-stap: I_1 legt via de vergelijking vast wat de helling m_1 op het moment t_1 moet zijn.
- B₁-stap: I_1 en m_1 bepalen een stukje lijnvormige grafiek. Op $t_2 = t_1 + \Delta$ is de waarde I_2 bereikt.
- A₂-stap: I_2 legt via de vergelijking vast wat de helling m_2 op het moment t_2 moet zijn.
- B₂-stap: I_2 en m_2 bepalen een stukje lijnvormige grafiek. Op $t_3 = t_2 + \Delta$ is de waarde I_3 bereikt.

Zo gaat dat door. Hellingsgetal en functiewaarde zijn gekoppeld door de vergelijking.

Maar we willen naar een verfijnde versie en kiezen dus een kleinere Δ en een nog kleinere Δ . Naarmate het stapje Δ kleiner is, ligt het benaderende schoksgewijze antwoord vermoedelijk dichter tegen de uiteindelijke werkelijkheid. Die 'werkelijkheid' is bij zo'n vergelijking een vloeiende grafiek van de functie I , met een bijhorende afgeleide, die samen voldoen aan vergelijking A.3.

De oplossing echt vinden

Het is mogelijk dat vergelijking A.3 meerdere oplossingen en zelfs heel veel oplossingen heeft. Denk maar aan het beginnen op een punt t_0 met twee verschillende startpunten $I_1(t_0)$ en $I_2(t_0)$. Het bovenstaande verhaal laat dat zeker toe.

Als verschillende functies $I_1(t)$ en $I_2(t)$ beide aan vergelijking A.3 voldoen, dan gelden:

$$R \cdot \frac{d(I_1(t))}{dt} + \frac{I_1(t)}{C} = \omega \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t) \text{ en } R \cdot \frac{d(I_2(t))}{dt} + \frac{I_2(t)}{C} = \omega \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t)$$

Door aftrekken volgt:

$$R \cdot \frac{d(I_1(t) - I_2(t))}{dt} + \frac{d(I_1(t) - I_2(t))}{C} = 0 \quad \text{formule A.4}$$

Anders gezegd: $J(t) = I_1(t) - I_2(t)$ voldoet aan deze vergelijking:

$$R \cdot \frac{d(J(t))}{dt} + \frac{d(J(t))}{C} = 0 \quad \text{formule A.5}$$

Dit is een eenvoudiger vergelijking! Je kunt makkelijk nagaan dat de volgende functie, met een willekeurig gekozen vaste waarde voor A , een oplossing is van vergelijking A.5:

$$J_A(t) = A \cdot e^{-t/(RC)} \quad \text{formule A.6}$$

Omdat A vrij te kiezen is, hebben we al oneindig veel oplossingen van A.5. We laten nu zien dat elke functie die aan A.5 voldoet ook zeker van de vorm A.5 is.

Stel je voor dat de functie $G(t)$ óók voldoet aan A.5; dan geldt dus:

$$R \cdot \frac{d(G(t))}{dt} + \frac{d(G(t))}{C} = 0 \quad \text{formule A.7}$$

Nu kunnen we laten zien dat de afgeleide van

$$\frac{G(t)}{J_1(t)}$$

gelijk aan 0 is, ofwel, dat $\frac{G(t)}{J_1(t)}$ constant is en dat $G(t)$ dus een veelvoud van $J_1(t)$ is.

We doen dat door de quotiëntregel voor differentiëren te gebruiken, $J_1(t)'$ uit te werken én te gebruiken dat G aan formule A.7 voldoet. In deze volgorde

$$\begin{aligned} \left(\frac{G(t)}{J_1(t)} \right)' &= \frac{G' \cdot J_1 - J_1' \cdot G}{G^2} = \\ &= \frac{G' \cdot e^{-t/(RC)} + 1/(RC) \cdot e^{-t/(RC)} \cdot G}{G^2} = "" \\ e^{-t/(RC)} \cdot \frac{G' + 1/(RC) \cdot G}{G^2} &= 0 \end{aligned}$$

De functies $J_A(t)$ hebben een prettige eigenschap: als t oploopt, gaat J snel naar 0. Dat betekent dat de verschillende mogelijkheden voor $I(t)$ alleen in het begin verschillen, maar op den duur eigenlijk nauwelijks.

Natuurkundig: op inschakelverschijnselen van de vorm A.6 na, ligt $I(t)$ vast.

Wiskundig: we weten nu ook, dat als we één oplossing van vergelijking A.3 vinden, dat we dan ook alle andere oplossingen te pakken kunnen krijgen, door een functie van de soort van formule A.6 toe te voegen.

Het vermoeden ligt voor de hand dat er voor vergelijking A.3 wel een oplossing van de volgende vorm bestaat

$$I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad \text{formule A.8}$$

waarbij dan I_0 en ϕ heel geschikt gekozen moeten zijn!

Door invullen in A.3 kunnen we snel vinden of er geschikte waarden voor I_0 en ϕ bestaan, en hier kan de theorie van hoofdstuk 2 ons helpen. Vullen we deze $I(t)$ namelijk in het linkerlid van A.3 in dan ontstaat deze uitdrukking:

$$\omega R \cdot I_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) + \frac{I_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)}{C} \quad \text{formule A.9}$$

Volgens hoofdstuk 2 is dat wéér een sinusoid met dezelfde hoekfrequentie ω . De waarde van ϕ

kunnen we echter nog vrij kiezen uit het hele interval $[0, 2\pi)$. Als we ϕ dat hele interval laten doorlopen, dan doorloopt de uitkomst van A.9 ook in fase de hele cirkel. Er is dus ook een waarde voor ϕ , waarbij het resultaat dezelfde fase (namelijk 0) heeft als $\cos(\omega t)$. Door ook I_0 een geschikte waarde te geven, wordt A.9 gelijk aan het rechterlid van A.3, namelijk

$$\omega \cdot U_0 \cdot \cos(\omega t) \quad \text{formule A.10}$$

Kortom: op uitdovende inschakelverschijnselen na is $I(t)$ inderdaad een sinussignaal en vanwege de formules in A.2 zijn $U_R(t)$ en $U_C(t)$ dat dus ook.

Daarmee is bewezen wat we hoopten te bewijzen.

De LCR-kring

Voor de LRC-kring in de figuur loopt het bewijs niet heel anders. Om dat U_L nu in de afgeleide van $I(t)$ wordt uitgedrukt, stuiten we op een differentiaalvergelijking van de tweede orde, maar ook hier geeft de op nul herleide vergelijking de uitdovende inschakelverschijnselen en is makkelijk na te gaan dat er een oplossing van de vorm $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$ is.

Andere schakelingen

Andere schakelingen met grotere combinaties van L , R en C laten zich altijd ook door vergelijkingen als die bij A.1 en A.2 beschrijven. Merk op dat A.1 opgesteld is op grond van de structuur van het netwerk en A.2 op grond van de individuele componenten. Bij grotereschakelingen treffen we ook die twee typen vergelijkingen. Er kunnen dan meerdere verschillende stroomen voorkomen in de verschillende individuele componenten, maar bij elk van die stroomen valt een vergelijking te bouwen die een lineaire uitdrukking in die stroom en zijn afgeleiden gelijkstelt aan een (hogere) afgeleide van de ingangsspanning, d.w.z. een sinusoïde.

Aantonen dat de oplossing voor die gekozen stroom weer een sinusoïde is, op een uitdovend inschakelverschijnsel na, wordt dan volgens het eerder vertoonde pad gedaan, al moet eerlijkheidshalve vermeld worden dat de inschakelverschijnselen complexer (!) kunnen zijn dan die van formule A.6.

Appendix B: Optellen van signalen met *ongelijke* hoekfrequenties

Extra exploratie-opdracht, met GR, Winplot of Wisweb-applets

Deze appendix bevat een zijstraat van de module. Het is een interessant gebied op zich; maar het is niet nodig voor de hoofdlijn.

Het komt vaak voor dat twee signalen met ongelijke frequenties worden samengesteld. Bijvoorbeeld twee wisselspanningen, die over twee in serie geschakelde elementen staan of bij tonen van muziekinstrumenten die altijd uit meer frequenties tegelijk bestaan. De bijhorende functies worden dan opgeteld. Het faseverschil is bij ongelijke frequenties niet van toepassing.

Je kunt met de GR of computersoftware zulke dingen goed onderzoeken.

Hieronder wordt de notatie van een GR gevolgd, maar andere goede programma's vind je op:

<http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html>

Download Winplot. Je hoeft niet te installeren, klik direct op het .exe-bestand.

<http://www.wisweb.nl>

Kies voor *Applets* en start de applet *Spelen met functies*

De basisaanpak staat in de eerste twee opdrachten; de tweede opdracht geeft aan wat je zou kunnen onderzoeken. Daarna volgt een 'muzikale' suggestie.

Opgave 6.34 Voer in:

$$Y_1 = 2 \sin(2t); Y_2 = 1.5 \sin(3t); Y_3 = Y_1 + Y_2.$$

- a. Observeer de drie grafieken.

Y_1 heeft 2 toppen op het interval $[0, 2\pi]$ en Y_2 heeft er daar 3.

Je zou kunnen verwachten dat Y_3 er dan ook 5 heeft. Is dat inderdaad zo?

- b. Y_3 is wél periodiek; maar wat is de periode? Hoeveel toppen heeft Y_3 per periode?

Opgave 6.35 Voortzetting

- a. Voer het onderzoek ook uit met andere amplituden, die in wat krassere verhouding verschillen, bijvoorbeeld 0.1 en 2, of andersom.

- b. Wat heeft het meest invloed op het toppental: de grootte van de amplituden of juist niet en maken de grotere frequenties de dienst uit?

Muziek

Een muzikale toon is altijd de som van diverse frequenties. Er zijn drie soorten combinaties van twee sinussignalen die hier van belang zijn.

A: de frequentieverhouding is groot.

De snelle trilling is een superpositie op de langzame. Een lage noot, met een hoge erbij. Je oor scheidt ze gemakkelijk, maar het is niet zo makkelijk te horen wat het verband is tussen de twee.

B: de frequentieverhouding bestaat uit niet zo grote gehele getallen

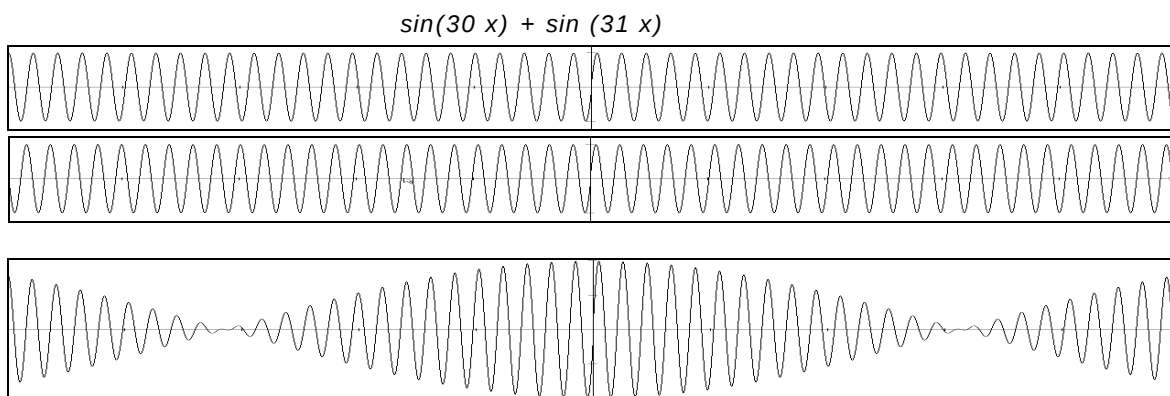
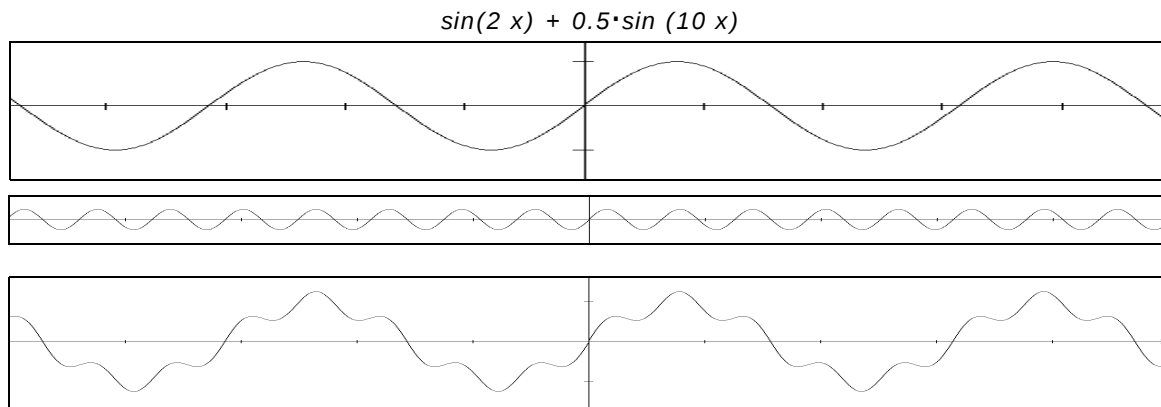
Bijvoorbeeld 1 : 2 of 2 : 3 of 4 : 5. Twee van zulke tonen mengen heel goed met elkaar. Voor een ervaren muzikant is het heel makkelijk aan te geven wat het verband tussen de twee tonen is: een octaaf, een kwint, een grote tert.

C: de frequentieverhouding ligt heel dicht bij 1 : 1.

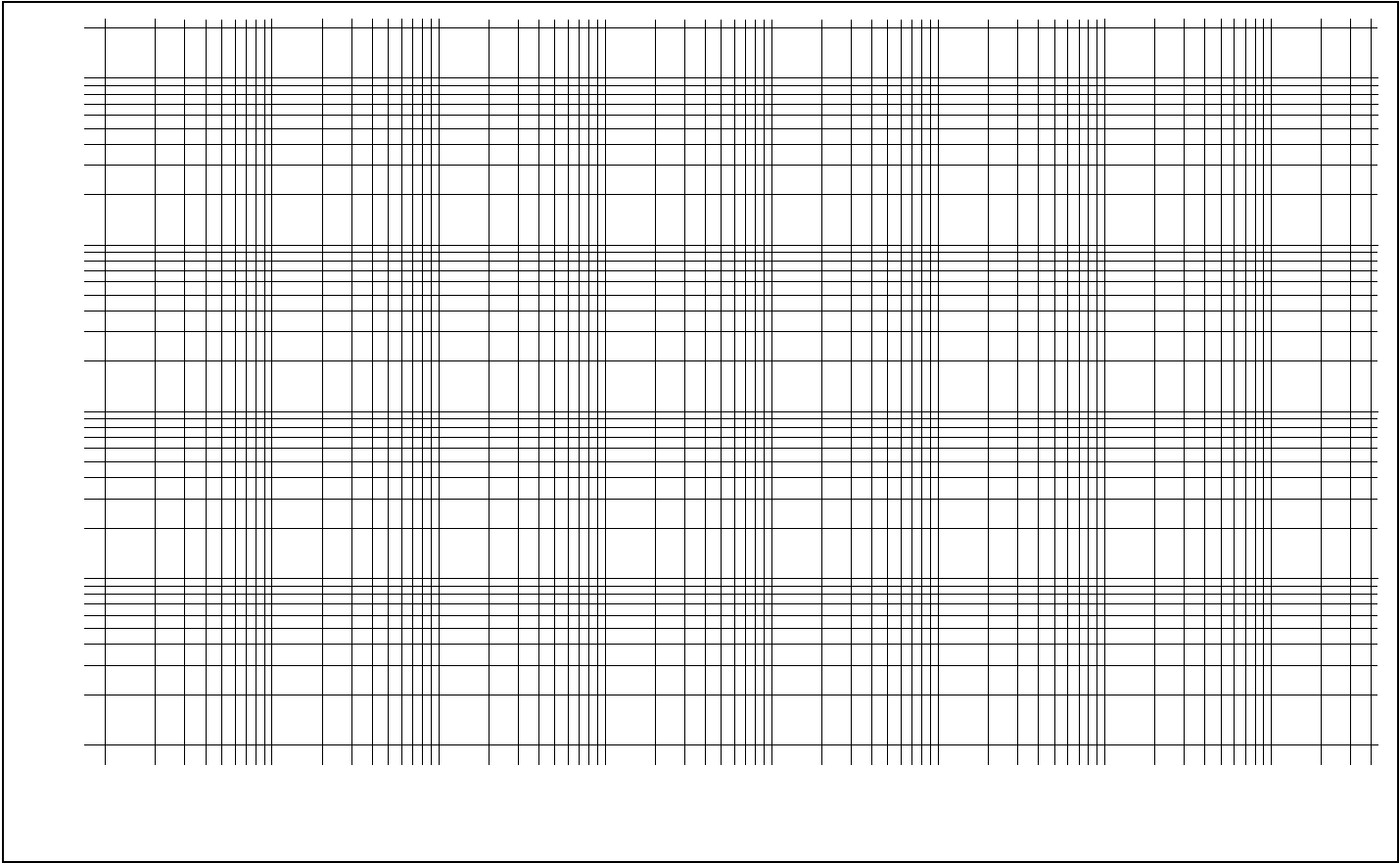
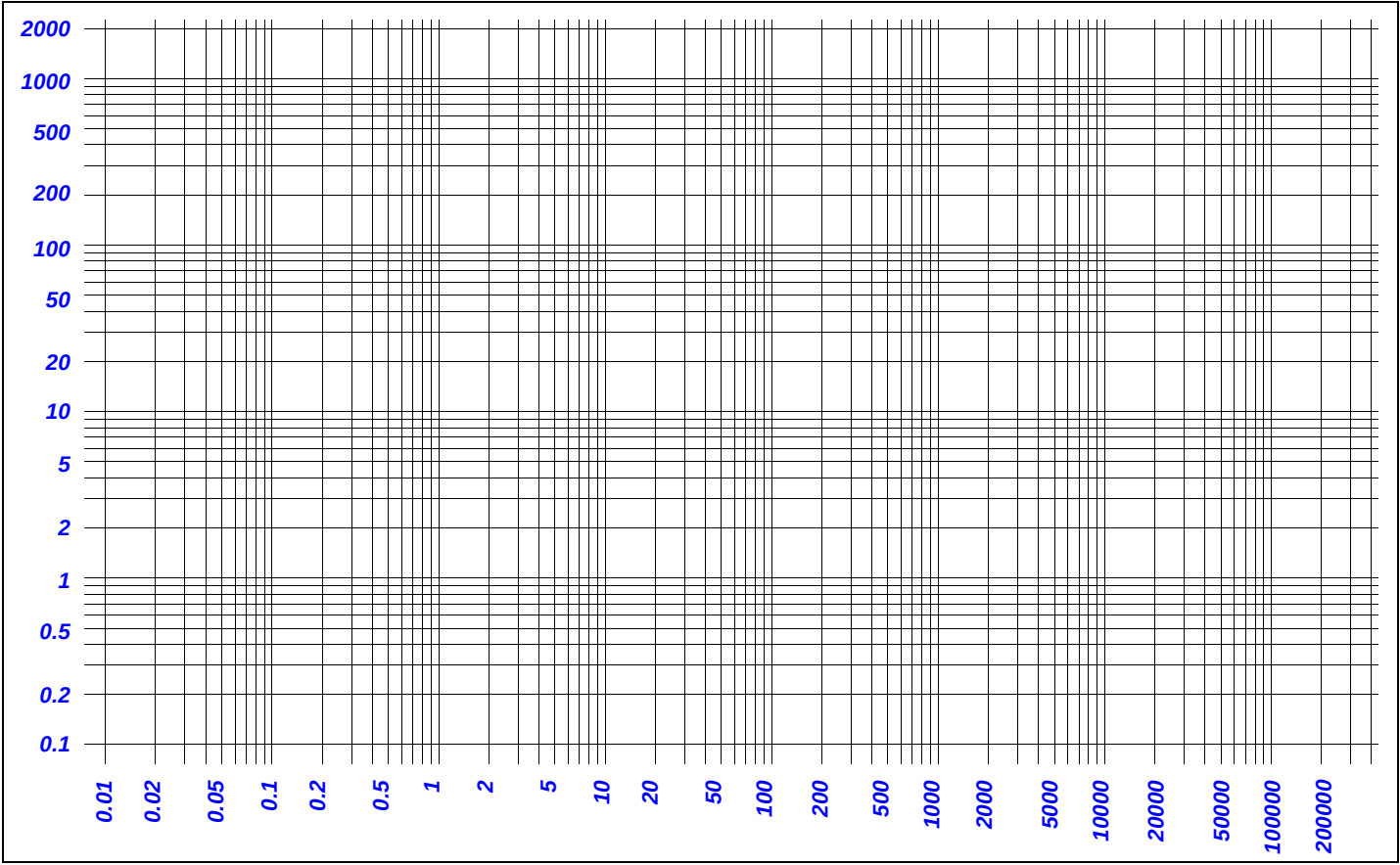
In dat geval lijkt het of je maar één toon hoort; maar de twee deeltönen versterken elkaar af en toe wel en af en toe juist niet waardoor de sterkte op en neer lijkt te gaan. Dit fenomeen heet zweving. Bij het stemmen van een viool (of je gitaar) kun je er gebruik van maken. Je stemt twee tonen dicht bij elkaar en gaat dan zo fijn-

stemmen, dat de zweving verdwijnt. Met deze methode kun je op het gehoor heel goed een 1 : 1 verhouding tot op 1000 : 1001 benaderen. Je kunt dit zweven heel mooi in beeld brengen met de applet Spelen met Functies, door twee signalen f en g met ongeveer gelijke amplitude te kiezen met bijvoorbeeld frequentie 10 voor f en 9.70 voor g. Na optellen kun je dan g 'stemmen' door de frequentie langzaam bij te stellen. Je ziet de somgrafiek dan mooi tot een regelmatige sinusgrafiek naderen.

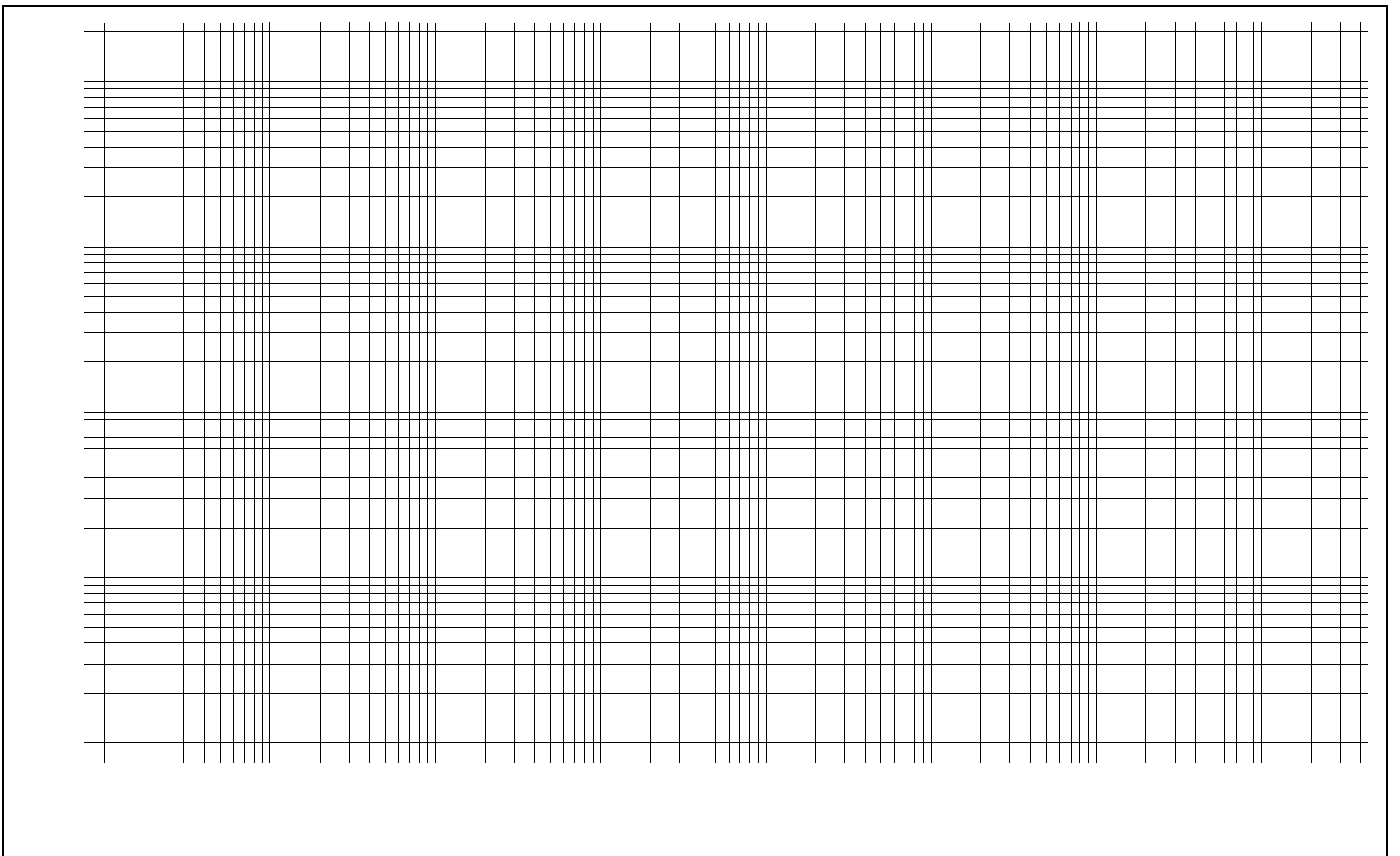
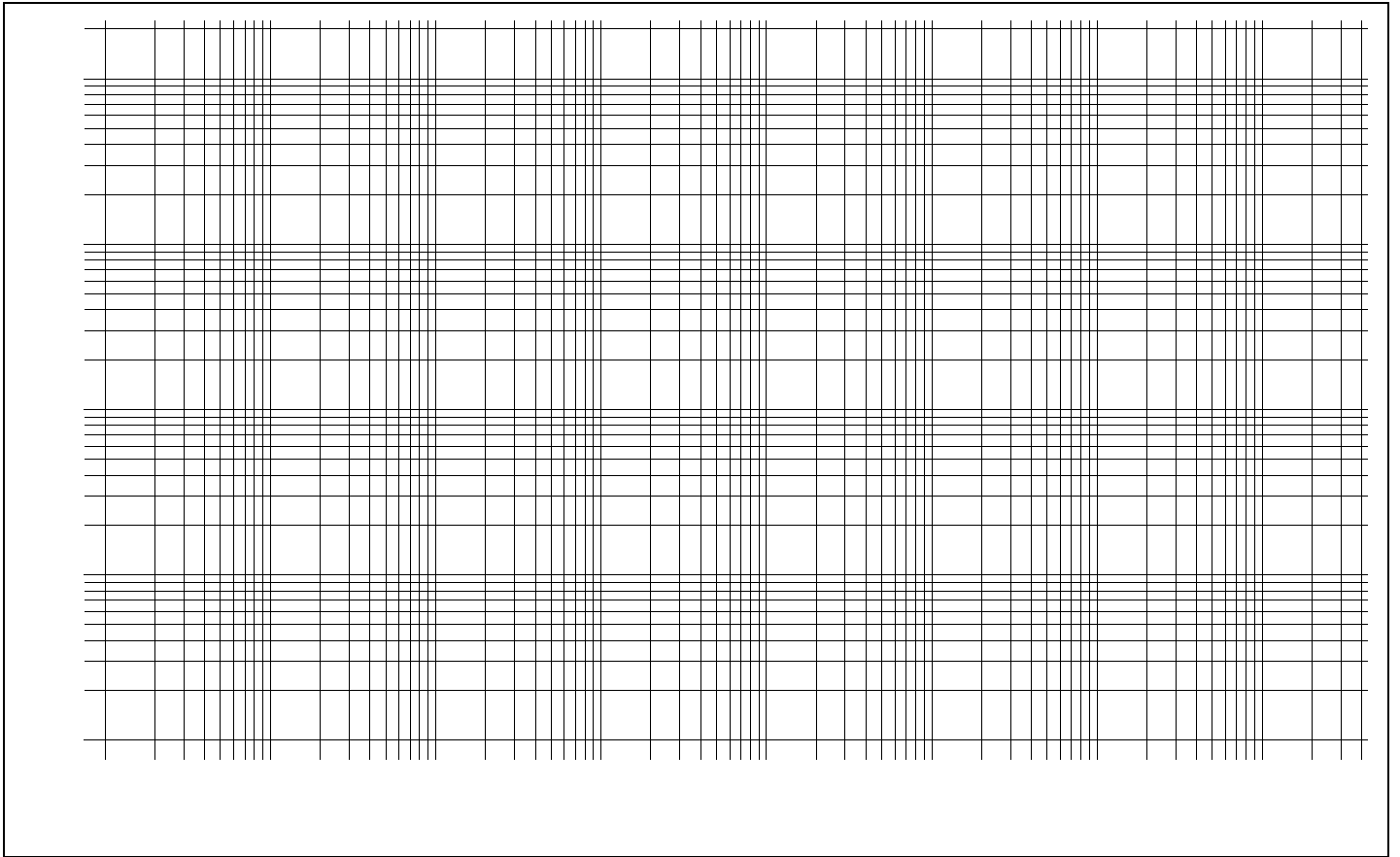
De voorbeelden hieronder zijn gemaakt met het programma WinPlot



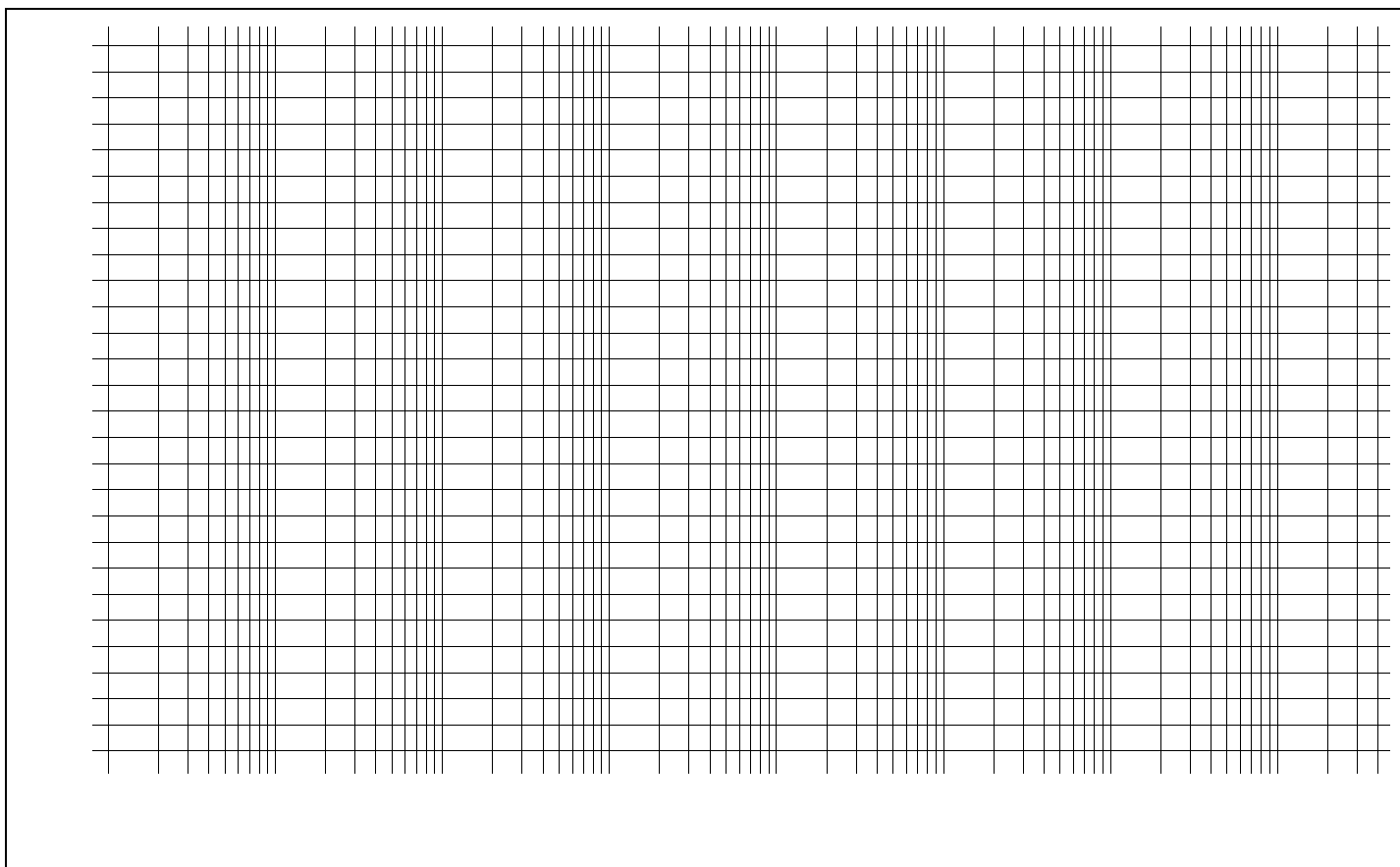
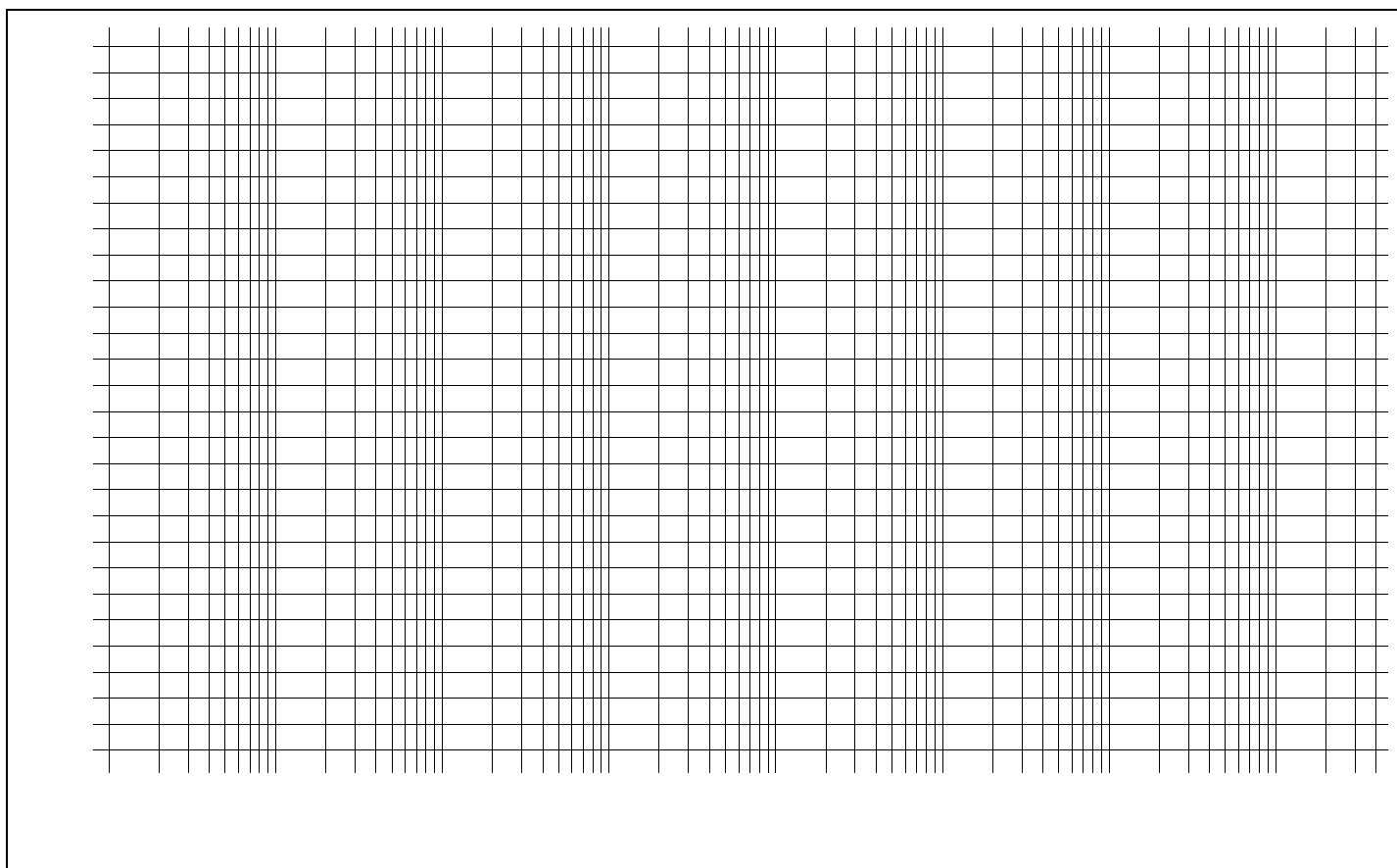
dubbellogarithmisch grafiekenpapier



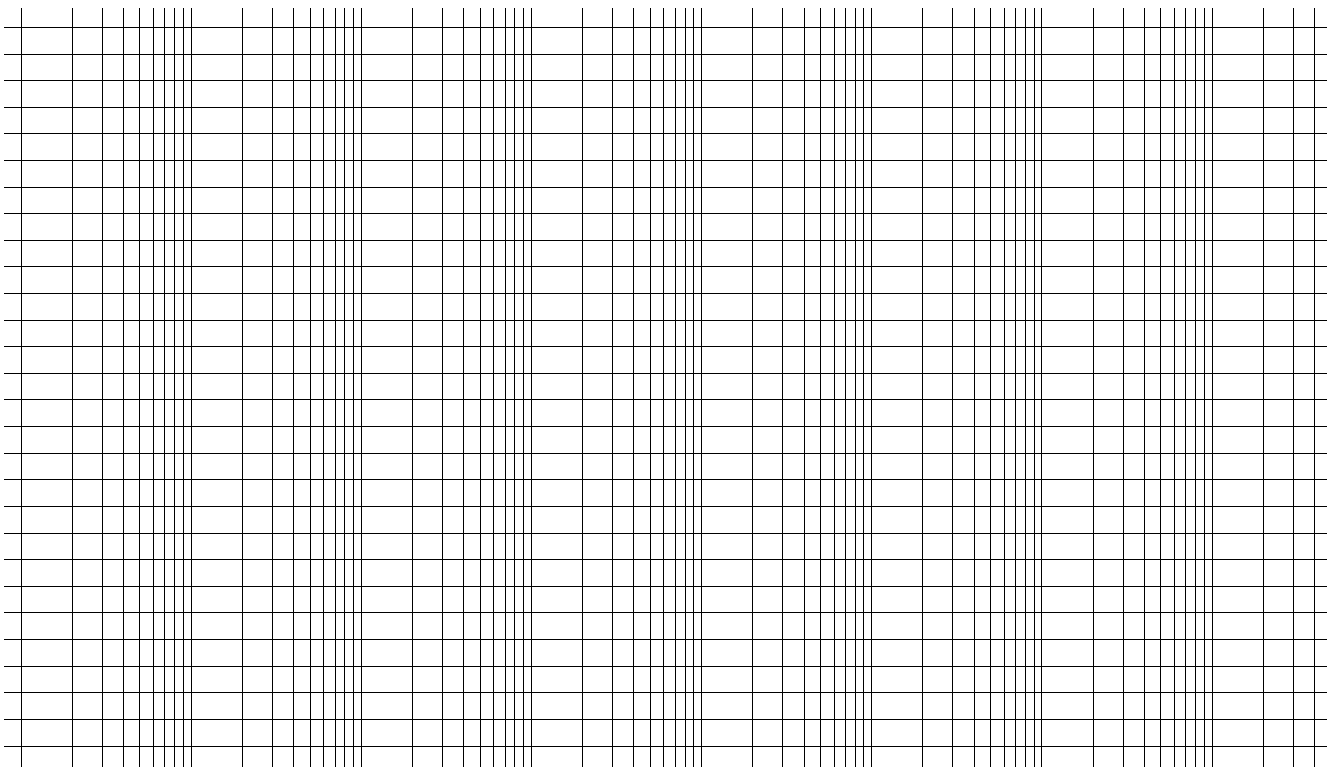
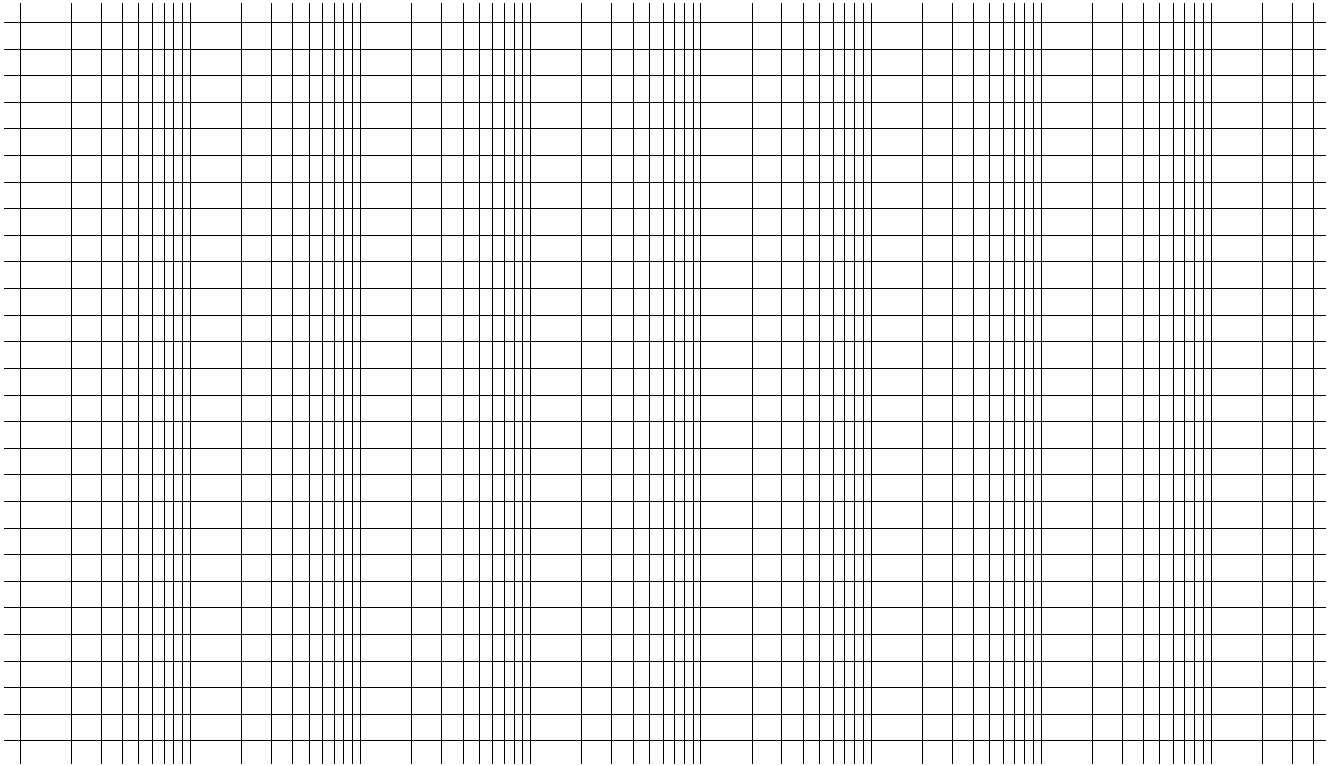
dubbellogaritmisch grafiekenpapier

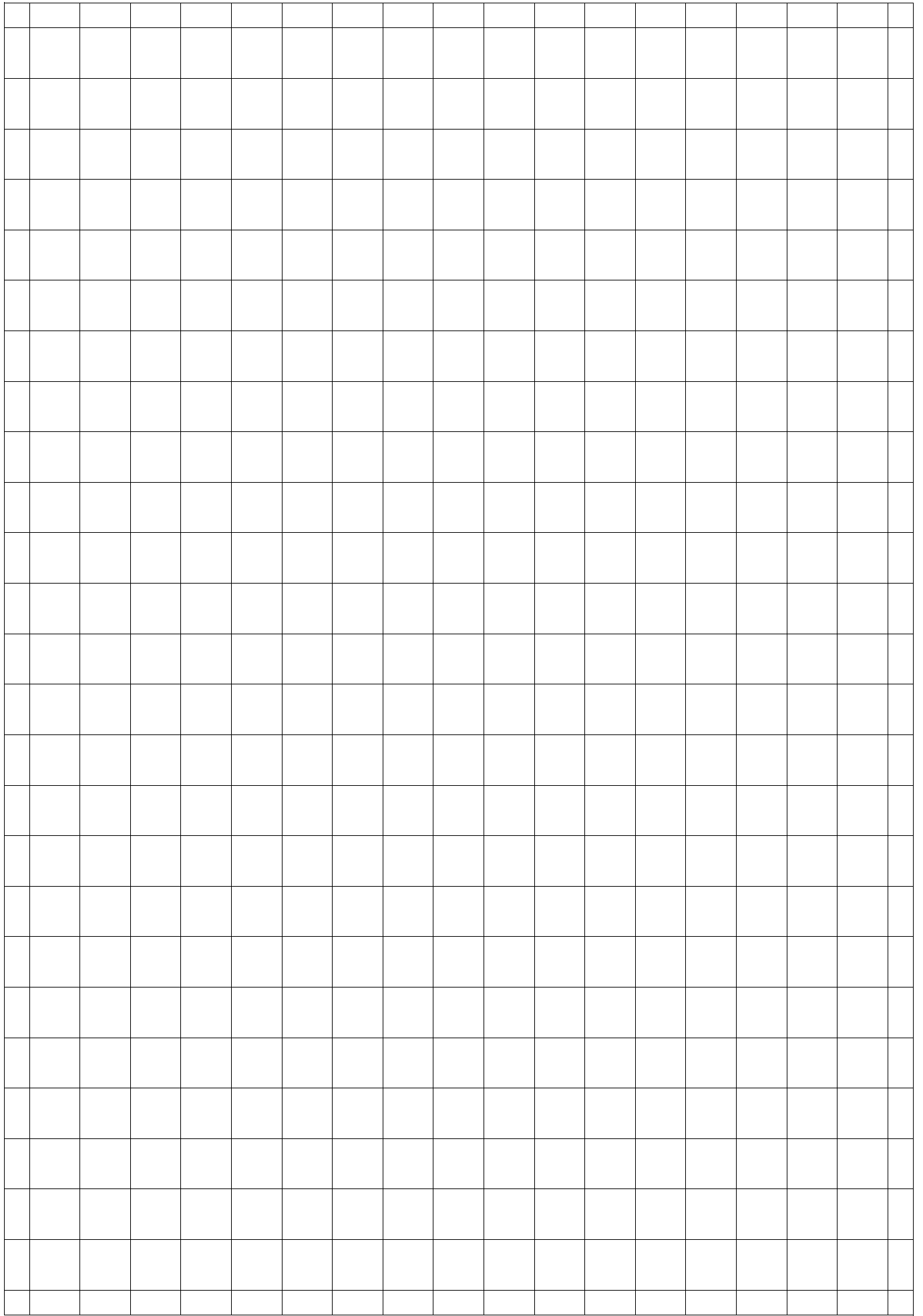


enkellogarithmisch grafiekenpapier



enkellogarithmisch grafiekenpapier





[illegible]

